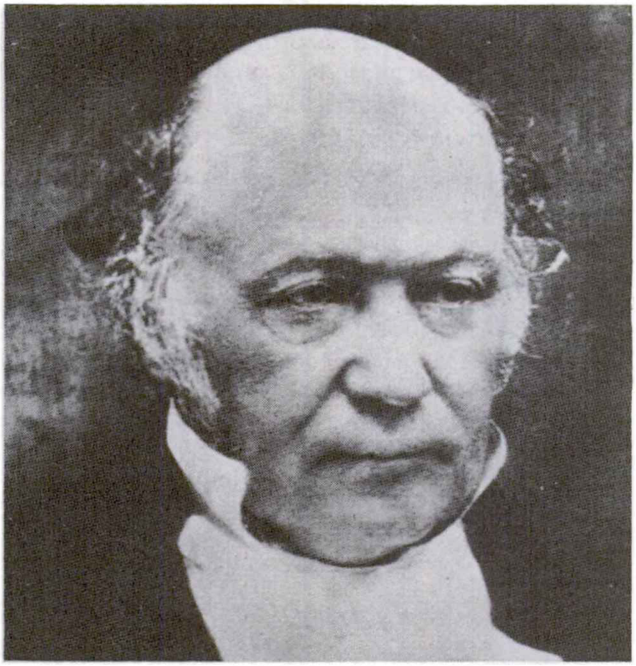

William R. Hamilton (1805-1865)

ORÍGENS FÍSICS DE L'ANÀLISI VECTORIAL

per

Manuel García Doncel

Introducció

El meu interès per aquest tema prové de l'estudi històric de la física. Avui sembla clar que la història d'una ciència d'aquest tipus empírico-formal[1] no és pas acumulativa sinó que avança a revolucions.[2] En aquesta història es produeixen de tant en tant moments singulars en els quals una problemàtica, que havia fet entrar en crisi el quadre científic vigent, és atacada en una direcció nova mitjançant la introducció de conceptes i de formalismes nous. Els conceptes són típicament físics, els formalismes, matemàtics. Per exemple, amb la revolució newtoniana que creà la dinàmica, hi foren introduïts clarament els conceptes de "massa" (contraposada al "pes" i a la simple "extensió" o quantitat de matèria cartesiana) i de "força" (contraposada a la "quantitat de moviment" i a la "inèrcia", amb les quals era mig barrejada en el concepte medieval d'"ímpetu"). Però hom hi introduí alhora un formalisme matemàtic nou, el càlcul diferencial, que Newton elaborà en forma de "teoria de fluxions".

Al segle XIX hi ha una altra revolució de la física, que origina l'electrodinàmica clàssica, portada per Maxwell, sota la inspiració de Faraday. El concepte físic nou és el "camp electromagnètic", amb els quatre vectors d'intensitat i d'inducció elèctriques i magnètiques, la definició fenomenològica dels quals exigia un esforç enorme d'abstracció. El formalisme matemàtic necessari per a treballar aquests camps de vectors, que avui és anomenat "anàlisi vectorial", inclou els conceptes típics de divergència i de rotacional i els teoremes típics de Gauss i de Stockes. El que ara ens volem preguntar és quin origen tingué aquest formalisme. La resposta esquemàtica és que l'anàlisi vectorial pren existència com a "càlcul de quaternions" en els

1. El que direm tot seguit és més propi de ciències com la física, que combinen radicalment tots dos elements d'experiència i formalisme. L'element formal domina en les matemàtiques, però reflexionant sobre l'evolució històrica d'aquestes també es pot arribar a un esquema anàleg [cf. LAKATOS-1970].
2. El text ja antològic sobre aquest tema és KUHN-1962. Encara que s'hi pretengui oposar, creiem que TOULMIN-1972 coincideix en les idees bàsiques.

estudis de Sir William Rowan Hamilton i de Peter Guthrie Tait [sobretot, HAMILTON-1853 i -1866, i TAIT-1867a], i com a tal fou introduït tímidament per James Clerk Maxwell al seu "Tractat d'electricitat i magnetisme" [MAXWELL-1873a]. La transformació d'aquest càlcul de quaternions en "anàlisi vectorial" fou obra de Josiah Willard Gibbs [GIBBS-1881] i d'Oliver Heaviside, que a més en desenvolupà extensament les aplicacions a l'electrodinàmica [HEAVISIDE-1893a].

Els cinc autors que acabem de citar justifiquen ben bé de sobres el caràcter "físic" d'aquests orígens de l'anàlisi vectorial. No obstant això, aquesta de seguida desbordà la física, car és la base de la nostra actual geometria mètrica, i l'arrel de la geometria diferencial i àdhuc de l'anàlisi funcional. Doncs, fent un esforç d'objectivitat històrica, miraré d'esbrinar en la gènesi de l'anàlisi vectorial, ultra aquesta línia física, altres línies d'especulació purament matemàtica.[3] Per molt que la doble interacció entre ambdues línies —pel llenguatge i per la inspiració— sigui un tema interessant en la recerca històrica actual.[4]

En vista de l'abundant literatura publicada aquests darrers quinze anys sobre aquesta història de l'anàlisi vectorial,[5] en la qual hi ha dos llibres enters i dues tesis doctorals d'història de les ciències, no esperem que el nostre treball faci grans aportacions originals. Pretenem ésser útils a aquell que desitgi introduir-se al tema, oferint-li'n un esquema simplificat, i orientant-lo cap a les fonts primàries, en les quals donat el cas ell mateix podrà estudiar directament tal o tal episodi d'aquesta història.

Tal com ja ho hem indicat, la nostra història passa per dues etapes: la introducció del càlcul de quaternions, i la transformació d'aquest en anàlisi vectorial. Abans de les dues seccions que tracten d'aquestes etapes històriques, en dedicarem una altra a la prehistòria del concepte de vector.

1. Prehistòria del concepte de vector

Indicarem tres línies de pensament que prefiguren vagament el nostre concepte de vector. La primera és física, les altres dues, matemàtiques. Ens detindrem en la darrera d'aquestes perquè va íntimament lligada amb l'etapa quaterniònica de la nostra història.

3. Reconec malgrat tot com a defecte el descuit de la línia matemàtica tipificada a GRASSMANN-1844, que és objecte d'estudis recents [HERTZBERGER-1966, LEWIS-1977]. No obstant això, aquesta línia té una influència mínima en la creació de l'anàlisi vectorial que presentem.
4. Vegeu BOCHNER-1966, MAURIN-MICHALSKI-1977, POGREBYSSKII-1968, STULOFF-1966 i YEZZI-1969.
5. És especialment valuós CROWE-1967a i l'abundant bibliografia que conté. Altres treballs recents són APOLIN-1970, BORK-1964, -1966, -1967, CROWE-1967b, DOBROVOL'SKII-1968, JOINER-1972, MOON-1965, PAWLIKOWSKI-1967, STOLZE-1978 i TRUESDELL-1953.

1.1 Paral·lelogram de velocitats i de forces

La primera figura[6] dels *Principia* [NEWTON-1687, 13] il·lustra la coneguda regla del paral·lelogram, que és explícitament formulada en els dos primers corol·laris que van immediatament darrera les tres lleis del moviment. En el corol·lari 1 la regla del paral·lelogram és aplicada a la composició de velocitats (més exactament, a la composició de desplaçaments efectuats uniformement en un mateix temps) i en el corol·lari 2 és aplicada clarament a la composició de forces. A la tercera edició dels *Principia* (la més autoritzada, car fou la darrera en vida de Newton) aquesta figura és repetida idènticament a la plana de l'esquerra i a la de la dreta [NEWTON-1687 (^{3}1726), 14 i 15], com si hom volgués subratllar la diferència d'ambdues aplicacions. No obstant això, podem veure, als manuscrits de Newton que mostren la gènesi d'aquest fragment dels *Principia*, que el mateix Newton confonia, al principi, aquestes dues aplicacions.[7] Alguns físics coetanis defensaren la necessitat d'introduir un postulat *a priori* per a establir la composició de forces segons la llei del paral·lelogram [BERNOULLI-1726]. Newton de fet passa de la composició de velocitats a la composició de forces en virtut de la segona de les lleis del moviment, lleis formulades just abans, i altres autors posteriors remarquen com és de notable aquesta demostració [THOMSON-TAIT-1867, *244, = n. 255].[8]

La idea de compondre velocitats (o desplaçaments uniformes) per mitjà de la regla del paral·lelogram ja era coneguda pels grecs. En aquest sentit els historiadors de la ciència[9] citen la "Mecànica" falsament atribuïda a Aristòtil [ARISTÒTIL-Mechanica, 95-96] i la d'Heró-d'Alexandria [HERÓ-Mechanica, cf. COHEN-DRABKIN-1948, *223-224]. Hom també sol citar Arquimedes, el seu llibre "Sobre les espirals" [ARQUIMEDES-Oeuvres, *2*, 237-299], encara que el que pròpiament hi fa és donar la definició geomètrica d'espiral [ibídem, 261] com a composició d'un moviment de rotació uniforme amb un altre d'allargament uniforme d'allò que serà anomenat "radi vector" (o "radi que transporta" o traça la corba).

Al segle XVI hom estudia la composició de totes dues coses: velocitats i forces.[10] Giovanni Battista Benedetti tracta la primera [BENEDETTI-1585, 160] i Simon Stevin la segona [STEVIN-1586]. Aquest estudia la composició de forces al seu tractat d'estàtica i l'enuncia d'una manera no-

6. Sobre l'interès de Newton en la publicació d'aquesta figura dins el text i separada de la figura següent vegeu la seva carta a Halley del 14 de juliol del 1686, a NEWTON-Correspondence *2*, 444 i Plate IV.
7. Vegeu-ne els manuscrits publicats a HALL-HALL-1962, 15, 158, 243, HERIVEL-1965, 182, 108, 246, 257, 292, 294, 304, NEWTON-Papers *6*, 30, 74, 96, 562. Fixeu-vos que segons la materialitat d'alguns d'aquests textos en el dibuix del paral·lelogram el costat AB representa un desplaçament i el costat AC una força.
8. Sobre l'errada en la demostració de Laplace i la detecció d'aquesta pel jove Hamilton vegeu GRAVES-1882, *1*, 661-662.
9. Vegeu, per exemple, CLAGETT-1959, 4-5, 41 i DUHEM-1905, *1*, 5-12.
10. Vegeu per exemple JAMMER-1957.

només aparentment diferent de la nostra regla del paral·lelogram: tres forces que, representades amb la intensitat i la direcció, tanquen un triangle, es compensen. Al cap d'un segle Pierre Varignon dóna explícitament el teorema del paral·lelogram de forces [VARIGNON-1687], justament el mateix any que Newton publica els seus escolis en la primera edició dels *Principia*.

Des del punt de vista matemàtic assenyalem que aquesta composició de velocitats o de forces no és pas considerada pròpiament una suma, car encara no és clara la noció de vector considerat com una quantitat matemàtica capaç d'addició (ja veurem com acabarà rebent aquest caràcter el segle XIX, per mitjà del nombre complex i quaterniònic). Però des del punt de vista físic aquesta composició de velocitats i de forces impulsarà indirectament l'estudi dels vectors, car en fa patent la utilitat. D'altra banda, aquest mateix vector de força entrarà a la teoria de camps com a "força electromotriu resultant", "força magnètica", etc., i exigirà l'elaboració d'una anàlisi vectorial.

1.2 L'"analysis situs" de Leibniz

Gottfried Wilhelm Leibniz enyora la peça bàsica de la geometria mètrica i exemplifica així una línia d'elucubració purament matemàtica que no arribarà pas a dur a terme. Vegem com expressa els seus ideals profètics en una carta dirigida a Huygens del 8 de setembre del 1679 [LEIBNIZ-1679]: "Encara no estic content amb l'àlgebra, perquè en geometria no dóna pas els mètodes més curts ni les construccions més belles. Per això crec que, pel que fa a la geometria, ens cal una altra anàlisi clarament geomètrica o lineal que expressi directament el *situs* [= situació, posició], com l'àlgebra expressa la quantitat. Crec que he trobat el mètode i que podem representar figures i àdhuc màquines i moviments per mitjà de caràcters, com l'àlgebra representa nombres o quantitats. Us envio un assaig que a mi em sembla important". Però, analitzant l'assaig, ens podem adonar que les realitzacions en són pobres. Hi introdueix la noció de congruència de triangles i de segments rectilinis, per tal d'estudiar els llocs geomètrics dels punts que satisfan certes relacions de congruència. Però aquestes relacions no depenen, per res, de l'orientació dels segments, només de llur longitud. És a dir, en aquest assaig no hi ha res que anticipi la noció de suma –i encara menys la de producte– vectorial. Ni tan sols la noció de vector oposat.

No podem pas considerar que aquestes ratlles de Leibniz fossin les inspiradores de treballs fets ulteriorment, car no foren publicades fins al cap d'un segle i mig, el 1833. Malgrat tot, mereixen un estudi històric [FREUDENTAL-1954].

1.3 La representació geomètrica dels nombres complexos

El descobriment d'aquesta representació, i amb aquest la introducció de vectors al pla, fou dut a terme independentment, pel cap baix, per sis matemàtics, durant més de trenta anys. Els documents originals en són WESSEL-1799, ARGAND-1806, BUÉE-1806, WARREN-1828, MOUREY-1828 i GAUSS-1831. Aquest darrer, tal com veurem, en un treball del 1799 ja emprava implícitament aquesta representació, de manera que podem, també, sistematitzar aquests descobriments en tres parells simultanis separats 7 i 22 anys respectivament.

La història d'aquests descobriments també ha estat estudiada unes quantes vegades.[11] En vista de la connexió d'aquesta història amb la dels quaternions de Hamilton, la tornarem a recórrer breument fixant-nos en els intents d'extensió del pla complex a un espai tridimensional, i en les possibles influències d'aquests treballs damunt el descobriment de Hamilton.

Caspar Wessel (1745-1818) és un matemàtic noruec que exposà el seu estudi "Sobre la representació analítica de la direcció" a la Reial Acadèmia de Dinamarca el 1797 (les actes foren publicades en danès al cap de dos anys, WESSEL-1799; la traducció francesa n'aparegué al cap d'un segle!). Vegem com hi exposa per primer cop el concepte de vector, sota el terme de "línia": "Aquest assaig tracta la manera com podem representar analíticament la direcció; això és, com expressar línies de manera que en una sola equació, en la qual intervinguin línies desconegudes junt amb altres de conegudes, puguin ésser-hi expressades totes dues coses alhora: la longitud i la direcció de la línia desconeguda". La suma de vectors, també la defineix fàcilment (sense esmentar la regla del paral·lelogram): "Dues línies se sumen unint-les de manera que la segona línia comenci allà on acaba la primera i després traçant una línia recta des del primer punt fins al darrer de les línies unides". D'aquesta suma, n'estudia la propietat commutativa i la possible extensió a "línies" no coplanars. La representació del producte de nombres complexos podria ésser transcrita en un text actual amb l'únic canvi d'anomenar i, en comptes de ϵ, la $\sqrt{-1}$: "Designem amb $+1$ la línia unitat positiva, i amb $+\epsilon$ una altra certa unitat perpendicular a la unitat positiva que surt del mateix origen; llavors l'angle de la direcció de $+1$ val $0°$, el de la de -1, $180°$, el de la de $+\epsilon$, $90°$ i el de la de $-\epsilon$, $-90°$ o $270°$. Segons la regla que diu que l'angle de la direcció del producte ha de valer com la suma dels angles dels factors, tenim: $(+1)(+1) = +1$; ... $(+\epsilon)(+\epsilon) = -1$; $(+\epsilon)(-\epsilon) = +1$; $(-\epsilon)(-\epsilon) = -1$".

"Veiem doncs que ϵ val $\sqrt{-1}$; i els distints productes són determinats de manera que hom no contravingui a cap de les regles ordinàries d'aquesta operació".

D'aquestes "línies", que escriu en la forma $a + \epsilon b$, o amb coordenades

11. Crowe [CROWE-1967a, 14, n. 13] en cita vuit narracions, a partir de la històrica: PEACOCK-1834, esmentada pel mateix Hamilton [HAMILTON-1853, notes de pp. (31) i (56)]. Les cites que corresponen al nostre segle són CAJORI-1912, COOLIDGE-1924, WINDRED-1929, i JONES-1954. A aquestes cal afegir KIEFER-1967 i ITARD-1969.

polars, r(cos v + ϵ sin v), en dóna correctament les regles de multiplicació, divisió i potenciació.

La cosa més important d'aquest primer document és, certament, l'intent fallit de generalitzar-ne l'estudi a "línies" de l'espai tridimensional. Per a fer-ho introdueix una altra $\sqrt{-1}$ que anomena η i fixa una base ortonormal, 1, η, ϵ. Ara una línia té l'expressió general $x + \eta y + \epsilon z$. El treball defineix fàcilment els productes dins els plans $(1, \eta)$ i $(1, \epsilon)$, que són enterament anàlegs, però no pot pas anar més enllà. Li manca saber el valor del producte $\eta\epsilon$ (o $\epsilon\eta$, car el suposa indubtablement commutatiu). L'interès d'aquest intent, encara que sigui fallit, és molt gran per a un estudi comparat de l'avanç matemàtic. Veurem que és aquest mateix problema que obligà Hamilton a crear els quaternions. Però, històricament parlant, aquest treball de Wessel no influí ni sobre Hamilton ni sobre cap altre dels matemàtics dels quals som hereus, car romangué del tot desconegut durant un segle sencer, fins que no fou traduït del danès al francès.

La nostra representació dels nombres complexos és certament hereva dels estudis de Jean Robert Argand (1768-1822). El seu "Assaig d'una manera de representar les quantitats imaginàries en les construccions geomètriques" fou publicat a París [ARGAND-1806]. La segona edició d'aquesta obra [² 1874] recull, en cinc apèndixs, un conjunt de treballs i de cartes de Jacques-Frédéric Français, François-Joseph Servois i el mateix Argand, que divulgaren aquest descobriment i en completen el quadre històric. Tots aquests foren publicats a la revista *Annales de Mathématiques*, editada per Joseph Diaz Gergonne, durant els anys 1813-1814, i ens hi haurem de referir en el nostre comentari.

L' "Assaig" d'Argand vol justificar el caràcter no pas absurd de les quantitats negatives i imaginàries. Per a fer-ho introdueix, a partir d'un origen, la noció de "línia dirigida" ("ligne dirigée", "ligne en direction", o "ligne considerée comme appartenant à une certaine direction": ARGAND-1806, *11). Una línia dirigida és designada mitjançant dues lletres cobertes amb una ratlla i que representen el "punt de partida" i el "punt d'arribada" de la línia [ibídem, *18]. Com a generalització de les operacions amb quantitats reals sobre una escala, Argand introdueix amb detall la suma i el producte d'aquestes línies dirigides, que representen quantitats complexes. El producte és en realitat introduït a partir de la noció de proporció entre parells de línies dirigides, basada en la idea de semblança geomètrica. En ocasió de la suma, introdueix de passada la regla del paral·lelogram i parla de descompondre una línia dirigida seguint dues direccions donades; però no fa cap al·lusió cinemàtica o dinàmica, encara que poques planes abans hagi al·ludit a la representació de forces mitjançant línies dirigides [ibídem, *19 i *10]. Les aplicacions que tracta extensament són més aviat de tipus geomètric, trigonomètric i algèbric. Entre aquestes destaca la demostració intuïtiva, que tanca l'assaig, del teorema general de l'àlgebra, l'existència de n solucions de l'equació de grau n.

Aquest assaig tingué una difusió molt reduïda [cf. ARGAND-1813, 133]. Això explica que, passats set anys, fos publicada als *Annales de Mathématiques* una memòria de J.-F. Français [FRANÇAIS-1813a] on hi ha una representació totalment anàloga. La seva representació és més sistemàtica i la seva terminologia més clara, car designa les "rectes de magnitud i posició donades" per mitjà d'una lletra llatina, que correspon al mòdul (o "magnitud absoluta"), amb un subíndex grec que correspon a l'argument. Al final de la memòria confessa honradament que les idees bàsiques d'aquesta representació no són originals seves sinó que provenen d'una carta escrita per A. M. Legendre al seu germà difunt, on li comunica al seu torn les idees d'un altre matemàtic que Français volia descobrir. Al mateix volum dels *Annales de Mathématiques* hi ha la carta on Argand, immediatament, manifestà que era el matemàtic cercat, i en la qual dóna la referència i una àmplia condensació de la seva memòria del 1806 [ARGAND-1813].

A la fi d'aquest resum Argand hi afegeix quelcom de nou: els seus primers intents d'estendre aquesta representació geomètrica a tres dimensions. Per fer-ho introdueix una tercera línia d'unitat, ortogonal a 1 i a $\sqrt{-1}$, que creu que pot representar per mitjà de la potència $(\sqrt{-1})^{\sqrt{-1}}$. No trigà gaire a aparèixer una altra carta de Français [FRANÇAIS-1813b] a la mateixa revista, en la qual també mira d'estendre la representació a tres dimensions, fixant la posició d'una recta a l'espai per mitjà d'un argument, també, complex. En una postdata d'aquesta mateixa carta critica l'intent d'Argand i mostra que amb expressions del tipus de $(\sqrt{-1})^{\sqrt{-1}}$ no es pot pas sortir del pla complex. La crítica més dura als intents d'Argand i de Français vindrà, però, de la ploma de F.-J. Servois [SERVOIS-1813], a la qual tots dos respongueren [FRANÇAIS-1814, ARGAND-1814], sempre a la mateixa revista. La resposta d'Argand es clou amb una demostració més polida del teorema general de l'àlgebra.

Històricament la conclusió de la crítica de Servois és interessant, car hi subratlla com és de problemàtic estendre la representació del pla a l'espai substituint el binomi complex per un "trinomi" [SERVOIS-1813, 235]: "L'analogia sembla que hagi d'exigir que el trinomi tingui la forma

$$p \cos \alpha + q \cos \beta + r \cos \gamma,$$

on α, β i γ siguin els angles d'una recta amb els tres eixos rectangulars; i que hom tingui

$$(p \cos \alpha + q \cos \beta + r \cos \gamma)(p' \cos \alpha + q' \cos \beta + r' \cos \gamma) = \\ = \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1.$$

Els valors de p, q, r, p', q', r' que satisfessin aquesta condició serien *absurds*, però ¿podrien ésser imaginaris, reductibles a la forma general A + B

$\sqrt{-1}$? Heus ací una qüestió d'anàlisi ben singular que sotmeto a la vostra clarividència. El sol fet de proposar-vos-la manifesta prou clarament que jo no crec de cap manera que tota funció analítica *no real* sigui realment reductible a la forma A + B $\sqrt{-1}$."

Al cap de quaranta anys Hamilton qualificarà aquest paràgraf com "el màxim acostament a una anticipació dels quaternions" i comentarà amb entusiasme [HAMILTON-1853, p. (57), nota]: "els sis *no-reals* que així preveié Servois amb una sagacitat notable, sense poder-los *determinar*, ara poden ésser identificats amb els símbols de la teoria de quaternions, aleshores desconeguts, + i, + j, +k, –i, –j, –k; si més no aquests símbols satisfan justament la *condició* proposada per ell i donen una *resposta* a la seva "singular qüestió". Hamilton acaba dient que ell no conegué aquest escrit fins bastant després d'haver descobert els quaternions i publicat els primers articles sobre aquests [HAMILTON-1844a, b...].

La "Memòria sobre les quantitats imaginàries" de l'Abbé Buée [BUÉE-1806] fou publicada en francès a les *Transactions of the Royal Society*, de Londres, el mateix any que l'"Assaig" d'Argand era publicat a París. Però la "Memòria" de Buée és molt més confusa i ingènua que l'"Assaig" d'Argand, i exercí poca influència [cf. ARGAND-1814, 209; HAMILTON-1853, p. (57), nota].

Al cap de vint-i-dos anys C. V. Mourey publicà "La veritable teoria de les quantitats negatives i de les quantitats pretesament imaginàries" [MOUREY-1828]. En aquest tractat excel·lent hom torna a pretendre descobrir la representació dels nombres complexos. Hi afirma que la representació de la seva àlgebra pot ésser estesa a tres dimensions [ibídem, 95], però no sembla pas que hagués publicat mai tal extensió.

El mateix any el Rev. John Warren publicà el "Tractat sobre la representació geomètrica de les arrels quadrades de quantitats negatives" [WARREN-1828]. És un llibre clar que, quan defineix la suma i el producte, fa remarcar la importància de les propietats avui anomenades commutativa, associativa i distributiva. A més, sembla que aquest llibre ja era conegut el 1829 per Hamilton [cf. GRAVES-1882, *3*, 190; HAMILTON-1844b, 489-495; -1853, p. (31)]. Però aquest "Tractat" no fa pas cap intent de representació tridimensional.

Citem finalment, entre els descobridors de la representació dels nombres complexos, el nom de Carl Friedrich Gauss. La seva primera publicació explícita sobre el tema encara és tres anys posterior [GAUSS-1831], però hi assegura que ja coneixia aquesta representació de feia molts anys, cosa que pot ésser comprovada a la seva "Demonstratio nova" del 1799. Aquesta comprovació ha estat rigorosament duta a terme [COOLIDGE-1924, 28-29]. D'altra banda, el treball de Gauss del 1831 contribuí molt i molt a difondre i fer acceptar aquesta representació dels nombres complexos entre els matemàtics del moment, i això que Gauss considerava que tal representació era una pura ajuda intuïtiva i no pas una justificació dels nombres complexos. Sembla que Hamilton no conegué aquest treball de Gauss abans del 1852, encara que el 1845 ja havia sentit parlar del seu intent d'elaborar una "àlgebra triple" [cf. GRAVES-1882, *3*, 311-312].

2. Elaboració del càlcul de quaternions

Primer veurem com Sir William Rowan Hamilton descobrí la idea de quaternió i després farem la ressenya de les publicacions més importants que establiren aquesta idea, amb tots els seus desenvolupaments i aplicacions, com una veritable conquesta intel·lectual. Un apartat especial serà dedicat a Peter Guthrie Tait, successor de Hamilton en aquest imperi intel·lectual.

2.1 Gènesi del descobriment de Hamilton

L'irlandès Sir William Rowan Hamilton (1805-1865) excel·lí des de la joventut en l'estudi de les llengües i de la física matemàtica. Als trenta anys ja havia conquerit una reputació internacional amb les seves teories i prediccions òptiques i amb el seu formalisme general de la dinàmica. Això darrer justifica a bastament que Jacobi l'anomenés "le Lagrange de votre pays" [GRAVES-1882, *3*, 509]. El 1843, a trenta-vuit anys, féu el descobriment dels quaternions, als quals, exclusivament, dedicà els darrers vint-i-dos anys de la seva vida.

La gènesi del descobriment va íntimament lligada als seus treballs sobre els nombres complexos, encara que no només a la intuïció geomètrica d'estendre'n la representació a l'espai tridimensional. En efecte, el 1837 li fou publicat el treball "Teoria de les funcions conjugades o dels parells algèbrics, amb un assaig preliminar i elemental sobre l'àlgebra com a ciència del temps pur" [HAMILTON-1837]. Segons aquest assaig, de caràcter expressament filosòfic inspirat en Kant, l'àlgebra, des del punt de vista teorètico-científic (no de l'artificial-utilitari ni del lingüístico-formal), és una ciència de la intuïció pura de temps, de la mateixa manera que la geometria ho és de la d'espai. La tercera part d'aquest treball, redactada bàsicament el 1833 [cf. GRAVES-1882, *2*,144], presenta els nombres complexos com "parells algèbrics" (a, b) de nombres reals. Defineix escaientment la suma i el producte de tals parells, subratllant-ne les propietats commutativa, associativa i distributiva. Finalment mostra l'equivalència d'aquests parells amb les expressions $a + b\sqrt{-1}$, el símbol $\sqrt{-1}$ de les quals és "absurd dins la teoria de nombres simples". El seu intent és, doncs –com el d'Argand–, de justificar els nombres imaginaris. Però per ell, com per Gauss, la representació geomètrica, en aquest punt, és secundària. La imatge que guia Hamilton és la d'un parell de moments cronològics. Comprovem-ho en la conclusió del seu treball, en la qual expressa a més l'esperança que té de generalitzar aquesta teoria de parells a una "teoria de triplets" i a una teoria de "conjunts de moments" cronològics (o "poliplets", tal com veurem que també els anomena). El treball acaba així [HAMILTON-1837]: "... la present

Teoria de Parells ha estat publicada ... a fi de mostrar de quina manera certes expressions, que en la concepció ordinària semblen merament simbòliques i impossibles d'ésser interpretades, poden entrar en el món del pensament i adquirir-hi realitat i significació si hom concep l'àlgebra, no com un simple Art o Llenguatge, sinó com una Ciència del Temps Pur. L'autor espera publicar més endavant moltes altres aplicacions d'aquesta concepció, especialment a Equacions i Integrals, i a la Teoria de Triplets i Conjunts de Moments, Passos i Nombres, que inclou com a cas particular aquesta Teoria de Parells".

Segons la ressenya històrica que prologa el seu primer llibre sobre quaternions [HAMILTON-1853, p. (39)], l'any 1830 Hamilton ja maldava per establir una teoria de triplets. Llavors els considerava geomètricament i en coordenades polars i –per generalització dels nombres complexos– proposava definir un producte, no distributiu!, que consistia a multiplicar els mòduls i a sumar els angles polars i els azimutals. I el 1836 escriví a John T. Graves (matemàtic germà del Rev. Robert Perceval, autor de la biografia de Hamilton que citem tot sovint) enviant-li altres intents semblants de multiplicació de triplets que també violaven la propietat distributiva [ibídem, pp. (36)-(38)].

El 1841 Hamilton rebé una carta del professor londinenc Augustus de Morgan que li posava en qüestió les esperances de trobar una "teoria de triplets" i li enviava alhora el seu article "Sobre la fonamentació de l'àlgebra", en el qual comentava el treball de Hamilton i quant problemàtics eren tals triplets [ibídem, pp. (41)-(42)]. Vegem, en la resposta de Hamilton, quina esperança tenia el 1841 de resoldre aquests problemes [GRAVES-1882, *2*, 343]:

"Pel que fa als Triplets, encara que abans em pensava que tenia quelcom de digne d'ésser publicat sobre aquests, he de reconèixer que no he pogut resoldre mai el problema que m'acabeu d'assenyalar com el més important d'aquesta branca de l'àlgebra (futura): *assignar* dos símbols Ω i ω , tals que l'equació simbòlica

$$a + b\,\Omega + c\,\omega = a_1 + b_1\,\Omega + c_1\,\omega$$

impliqui les tres equacions

$$a = a_1,\ b = b_1\ ,\ c = c_1 .$$

Però si la concepció que tinc de l'àlgebra és correcta, *ha* d'ésser possible, *d'una manera o altra,* introduir-hi no solament triplets sinó també *poliplets,* per tal que, en cert sentit, se satisfaci l'equació simbòlica

$$a = (a_1\,, a_2\,, \dots\, a_n),$$

on *a* és un únic símbol que indica un pensament únic (complex), i a_1, a_2, ... a_n denoten *n* nombres reals, positius o negatius, o amb altres paraules *n* dates, en el sentit cronològic del mot, excloent-ne només traços i mesures externs i la noció de causa i efecte".

Fixem-nos que aquest concepte de "poliplet" supera la intuïció geomètrica, i que en particular el concepte de "quadruplet" pot haver inspirat la idea de quaternió. No obstant això, tal com ja ho veurem, en el descobriment d'aquest intervenen clarament elements geomètrics, i el quart terme hi apareix sense que ningú no ho hagi pretès. La qual cosa no vol dir que l'*acceptació* no en fos més fàcil a qui ja era familiaritzat amb el concepte de poliplet.

El descobriment dels quaternions fet per Hamilton pot ésser datat amb tota la precisió el 16 d'octubre del 1843. Dos documents fixen aquesta data: l'acta de la reunió de la Reial Acadèmia Irlandesa d'aquest mateix dia [IRISH-ACAD-1843] i la carta que l'endemà Hamilton escriví al matemàtic John T. Graves [HAMILTON-1843]. La gènesi científica del descobriment ha estat descrita pel mateix Hamilton [HAMILTON-1853, pp. (44)-(48)] i també per Tait [TAIT-1890], i estudiada per historiadors de les ciències en l'ocasió del seu centenari [WHITTAKER-1944 i MacDUFFEE-1945] i àdhuc més recentment [WAERDEN-1973, HANKINS-1977].

Comencem, però, assaborint-ne el context humà tal com el reconstruí Hamilton mateix al cap de 22 anys en una carta escrita al seu fill gran, Archibald. A fi de satisfer la curiositat d'aquest, Hamilton li conta de cap i de nou el descobriment, implicant-lo a ell en la història, i presentant-lo com tota una epopeia familiar que féu patir els fills, la mare i el pare [GRAVES-1882, *2*, 434-435]:

"Em permetré de parlar *de mi* a propòsit d'això, però ho faré de manera que t'hi impliqui *a tu,* traslladant-nos a un temps *pre-quaterniònic,* quan només eres *un nen* però ja m'havies caçat el concepte de vector i la representació d'aquest per mitjà d'un *Triplet* ... Cada matí, durant la primera meitat d'aquell mes [octubre 1843], quan baixàveu a esmorzar el teu germà (aleshores) petit, William Edwin, i tu, em solíeu preguntar: "Què, pare, ja saps *multiplicar* triplets?" I jo no podia fer res més que moure el cap i respondre: "No, només els sé *sumar* i restar".

"Però el 16 d'aquell mateix mes –que era dilluns i dia de junta de la Reial Acadèmia Irlandesa– estava fent temps, tot passejant, mentre esperava l'hora de presidir-la i ta mare passejava amb mi, seguint el Canal Reial, on potser ella m'havia conduït; encara que de tant en tant ella em digués coses, jo tenia al cap una mena de *sub-corrent* de pensament que anava creixent i que al capdavall donà un *resultat* del qual puc dir sense exagerar que vaig *notar* la transcendència. Era com un circuit *elèctric* que semblava que es *tanqués,* i brillà una guspira, precursora (tal com *immediatament* ho vaig *preveure*) de llargs anys ulteriors de pensament i de feina clarament definits... I no em vaig poder pas estar –per poc filòsofic que fos– de gravar am una navalla en una pedra del pont de Brougham, per on estàvem passant, la fórmula fonamental dels símbols i, j, k, a saber

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1,$$

la qual enclou la *Solució* del *Problema*. És clar que la inscripció s'esborrà ja fa temps. Una anotació més duradora és conservada, emperò, al Llibre de Juntes de l'Acadèmia, corresponent a aquell dia (16 d'octubre de 1843), la qual registra el fet que vaig demanar i obtenir permís per a llegir un treball sobre *Quaternions* a la *Primera Reunió General* de la junta. D'acord amb això, el treball hi fou llegit el dilluns dia 13 del novembre següent".

Efectivament, a les minutes de l'Acadèmia consta, el 16 d'octubre, el "Permís concedit al president per a llegir un treball 'sobre una nova espècie de quantitats imaginàries, relacionades amb una teoria de quaternions' " [IRISH-ACAD-1843]. I efectivament el 13 de novembre hi llegí un treball amb aquest títol que aparegué l'any següent a les Actes de l'Acadèmia [HAMILTON-1844a].

Mirem-nos, però, més de prop aquesta fórmula fonamental que el relat de Hamilton ens presenta esculpida romànticament al pont de Brougham. Sota aquesta aparença tan simètrica i tan estilitzada (i tan inversemblant per a un primer esforç creador!) inclou una asimetria pregona. En efecte, aquestes desigualtats impliquen (emprant la propietat associativa del producte i prou) l'expressió

$$ij = -ji = k$$

i les dues expressions que hom obté d'aquesta permutant circularment i, j, k. La gran revolució conceptual del descobriment de Hamilton és aquesta flagrant violació de la propietat commutativa del producte, que trenca una convicció espontània secular. Això justifica que Hamilton qualifiqui el seu descobriment de "curiós, gairebé salvatge" [GRAVES-1882, *2*, 441] i que el mateix matemàtic John T. Graves dubti del fet de "fins a quin punt tenim llibertat de crear, com ens sembli, imaginaris, i de dotar-los de propietats sobrenaturals" [ibídem, 443].

El programa espontani de recerca de Hamilton cercava uns "triplets" per als quals (a) fossin definits la suma i el producte, tots dos commutatius i aquest distributiu respecte a aquella, (b) fos definit l'invers i, doncs, el quocient, (c) fos definit el mòdul, de manera que per al producte fos el producte de mòduls, i (d) existís una interpretació tridimensional òbvia. Els "quadruplets" que trobà només violaven la propietat commutativa del producte. Cal notar que els nostres trivectors violaran quasi totes aquestes propietats, tant pel que en fa al producte escalar com al vectorial. Perquè, certament, el nostre espai vectorial és molt més complex estructuralment que aquest "cos no commutatiu" (tal com ho diem avui) dels quaternions.

Segons la reconstrucció històrica més immediata i més matemàtica del mateix Hamilton [HAMILTON-1853, pp. (43)-(46)], la no commutativitat i el quart terme sorgiren conjuntament en un raonament del tipus següent. Hamilton cercava –com Wessel, Argand i DeMorgan– "triplets" de la forma $a + ib + jc$, on i i j tenen les propietats de dues arrels de -1 distintes. El producte d'aquests dos "triplets" li fa (emprant espontàniament la propietat commutativa: $ij = ji$):

$$(a + ib + jc)(x + iy + jz) = (ax - by - cz) + i(ay + bx) + \\ + j(az + cx) + ij(bz + cy).$$

En el cas particular que aquests dos "triplets" defineixin un pla que contingui la unitat (és a dir, quan $bz = cy$) hom pot calcular aquest producte emprant la representació geomètrica dels nombres complexos per a aquest pla. El resultat és el mateix que acabem d'escriure però sense el darrer terme, $ij(bz + cy)$. Hamilton diu que la primera conjectura que féu fou suposar $ij = 0$. Però preferí suposar anti-commutatiu el producte, $ij = -ji$, cosa que fa que el darrer terme sigui $ij(bz - cy)$, que és nul en aquest cas particular. En general, $ij = -ji$ ha de correspondre a una quarta direcció k, per tal que sigui satisfeta la condició (c) dels mòduls:

$$(a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2) = (ax - by - cz)^2 + \\ + (ay + bx)^2 + (az + cx)^2 + (bz - cy)^2.$$

Fou així que els "triplets" foren transformats en "quaternions" no commutatius, i és aquí on pogueren influir-hi els seus treballs anteriors sobre "poliplets", per a fer acceptable aquesta idea de "quaternió", la representació del qual desborda el nostre espai tridimensional.

Amb les cartes que escriví els dies següents al descobriment hom pot veure com, des del principi, Hamilton intuí l'interés del seu descobriment per les possibles aplicacions a diverses disciplines entre les quals esmenta la trigonometria esfèrica, la termologia i, específicament, l'electricitat [GRAVES-1882, *2*, 439-442]. El 1851 arribà a escriure [ibídem, 445]: "Haig d'afirmar àdhuc que aquest descobriment em sembla tan important per a la meitat del segle XIX com ho fou el descobriment de les fluxions per al final del XVII". La perspectiva històrica d'avui ens fa reconèixer aquesta afirmació com a prefètica. Per molt que Hamilton aleshores no ho pogués sospitar, l'estudi de l'electricitat i el magnetisme estava a punt d'entrar en una revolució conceptual, la teoria de camps, per a la qual, ja ho veurem, aniria beníssimament aquest formalisme dels quaternions, adequadament desplegat i apurat.[12]

12. Pel que fa a les repercussions del descobriment dels quaternions en el desenvolupament de la física o de les matemàtiques vegeu BACHELARD-1974, DIRAC-1944, FISCHER-1951, -1957, NAIMAN-1974, PYCIOR-1976 i RASTALL-1964.

2.2 *Publicacions de Hamilton sobre els quaternions*

Ja hem esmentat la primera publicació seva sobre el tema: la històrica conferència de l'onze de novembre del 1843, publicada l'any següent a les Actes de la Reial Acadèmia Irlandesa, i en forma molt semblant al *Philosophical Magazine* [HAMILTON-1844a; -1844b, 10-13]. A aquests dos, més de trenta articles seran afegits per Hamilton els quatre anys 1844-1847, i més de cent durant els vint-i-dos anys de la seva vida, 1844-1865.[13] Seria interessant, però arduós, fer un estudi comparatiu d'aquestes publicacions, per tal de conèixer com Hamilton va articulant la teoria i com n'obté resultats geomètrics, mecànics i astronòmics. Aquí ens conformarem considerant dos fragments dels articles que són especialment importants per llurs repercussions futures, alhora geomètriques i físiques.

El 1846 publicà per primer cop la contraposició dels conceptes "escalar" i "vector", que apareixen en l'operació de "separar la part real de la imaginària del quaternió", separació que en la seva teoria ha de constituir una "operació freqüent i fonamental" [HAMILTON-1846, 26-27; cf. -1847a, 3]:

"La part algèbricament *real* pot prendre ... tots els valors continguts en l'única *escala* [= *"scale"*] de progressió de nombres des de l'infinit negatiu al positiu; l'anomenarem per això *part escalar* o simplement *escalar* [= *"scalar"*] del quaternió i en formarem el símbol anteposant al símbol del quaternió el signe Scal., o bé només S. quan amb aquesta darrera abreviatura no hi hagi perill de confusió. Per contra, la part algèbricament *imaginària*, com que és construïda geomètricament per mitjà d'una recta o radi vector, que en general per a cada quaternió determinat té una longitud determinada i una direcció en l'espai determinada, pot ésser anomenada *part vectorial* o bé simplement *vector* del quaternió; i podem denotar-lo anteposant-li el signe Vect. o V. Podem doncs dir que *en general, un quaternió és la suma de les seves pròpies parts escalar i vectorial* i podem escriure

$$Q = \text{Scal. } Q + \text{Vect. } Q = \text{S.}Q + \text{V.}Q$$

o encara més senzillament

$$Q = SQ + VQ."$$

L'any següent, continuant aquest mateix treball, Hamilton introduí l'operador funcional (!) que no trigà a ésser anomenat "nabla" i escrit "∇" Hamilton n'introdueix així la definició i el símbol, alhora que en preveu la

13. Per a una bibliografia exhaustiva de les publicacions sobre quaternions vegeu MacFARLANE-1904. Els articles de Hamilton més importants per a l'estudi del desplegament de les seves idees són HAMILTON-1844 a, b, -1845, -1846, -1847a, b, 1848a, b, -1849 i -1850 i poden ésser trobats a HAMILTON-Papers.

importància de les aplicacions [HAMILTON-1847b, 291; cf. HAMILTON-1847a, 273-292, comunicada el 20 de juliol del 1846]:
"... hom defineix ∇ en funció dels tres símbols i, j, k i de la coneguda operació de derivació parcial respecte a les variables x, y, z, ... de la manera següent:

$$\nabla = \frac{id}{dx} + \frac{jd}{dy} + \frac{kd}{dz};$$

aquest signe nou tindrá un quadrat simbòlic l'oposat del qual és donat per l'expressió següent:

$$-\nabla^2 = \left(\frac{d}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d}{dz}\right)^2;$$

és ben clar que en la física analítica aquesta expressió ha de tenir un camp d'aplicacions enorme".

Hamilton també publicà dos llibres extensos sobre els quaternions, *Lectures on Quaternions* [HAMILTON-1853] i *Elements of Quaternions* [HAMILTON-1866], sobre la gènesi i el contingut dels quals donarem unes quantes indicacions.

Durant l'any 1848 Hamilton pronuncià una sèrie de quatre conferències sobre quaternions a la Universitat de Dublín.[14] Aquest mateix any fou condecorat pel seu descobriment amb medalles de la Reial Acadèmia Irlandesa i de la Reial Societat d'Edimburg. Així doncs, a les conferències assistiren matemàtics famosos com Arthur Cayley i George Salmon. Aquest darrer, conscient de la necessitat d'un llibre que fes accessibles aquestes conferències, escriví elegantment a Hamilton el 1852 que el seu mètode dels quaternions "és ara per ara un arc d'Ulisses que no pot tensar ningú més que el seu amo" [GRAVES-1882, *3*, 346].

El llibre de les *Lectures*, doncs, havia de satisfer una necessitat didàctica però el fet és que no ho féu perquè acabà essent massa extens i massa difícil. En efecte, amb un zel excessiu de completesa, Hamilton afegí tres conferències més a les quatre inicials, cosa que quadruplicà la llargada del text (les quatre primeres conferències ocupen 185 pàgines, i totes set n'omplen 737). Aquest text va acompanyat d'un prefaci i d'un índex. El prefaci, que presenta la història del descobriment i que hem citat abundantment, ocupa 64 planes. I l'índex n'ocupa unes altres 64!, de manera que, a parer del mateix Hamilton, com que és "un xic més complet d'allò que és usual, pot ésser útil ... també com a *resum* de l'obra i en alguns punts com a

14. En aquesta mateixa universitat havia presentat el 1845 un esquema breu sobre quaternions per tal d'obtenir-ne resultats trigonomètrics, i en les seves classes de 1847 els havia emprat per a obtenir certs resultats astronòmics [HAMILTON-1853, 2-3].

comentari" [HAMILTON-1853, p. (63)]. El conjunt es fa excessivament extens.

La dificultat de les *Lectures* no prové tant del tema mateix dels quaternions com de "l'*estil metafísic* d'expressió" que Hamilton empra a gratcient amb la pretensió de transmetre "els *pensaments fontals*, les *concepcions primigènies* i les *actituds bàsiques de la ment*" durant el procés de llur descobriment [ibídem, 4]. Aquest estil històrico-metafísic és el que fa que el llibre sigui terriblement lent i de mal pair. Per exemple, la primera conferència és exclusivament dedicada al concepte de vector, com a "línia dirigida", i a l'addició i la substracció de vectors. Doncs bé, hi empra unes vint planes [ibídem, 4-22] de caràcter filosòfic abstracte, amb algunes il·lustracions astronòmiques trivials, per tal de presentar el vector com a operador de transport, o com a diferència entre dos punts considerada en "l'aspecte sintètic". Això ho formula finalment en l'equació "vector = vectum - vehend", que (desplegant les abreviatures de "punctum vectum" i "punctum vehendum") podríem traduir: "transportador = punt transportat – punt a transportar". I fa servir deu planes més per a introduir el vector oposat ("revector = vehend – vectum") i la suma de vectors (l'aplicació successiva d'un "vector" i un "provector", que equival a un "transvector"). Citem de passada l'al·lusió que fa, al final de la conferència, al fet que aquestes regles d'addició i de substracció "resulta que *coincideixen en aquesta teoria, com també en moltes altres* [al·ludeix certament a la representació dels nombres complexos, de la qual ha ressenyat la història en el pròleg], amb les regles de *composició i de descomposició de moviments (o de forces)*" [ibídem, 32]. La segona conferència és una justificació de les regles de multiplicar els símbols i, j, k. Amb aquest propòsit els defineix no solament com a vectors de longitud unitat sinó també com a "versors quadrantals" o operadors de rotació de 90°. Això li exigeix un desplegament filosòfic del concepte de "versor" com a quocient de dos vectors de mòdul igual ("versor = versum / vertend") i, en general, del de "factor" com a quocient de dos vectors qualssevol ("factor = factum / faciend"). Això ocupa quaranta pàgines més, en les quals no fa escatimar la vèrbola filosòfica a propòsit de "refactor", "profactor", "transfactor", "reversor", "proversor", transversor"... El concepte mateix de quaternió apareix a la tercera conferència com a "factor" o quocient d'un parell de vectors qualssevol, o sota la forma de "biradial", com diu ell. El quaternió és descompost en el producte del seu mòdul (que anomena "tensor") i de la seva "part versorial" (o quaternió proporcional al donat, de mòdul unitat). Aquesta és definida per l'angle i l'eix de rotació. D'això ve que el quaternió depengui de quatre paràmetres. La quarta conferència estudia les potències i les arrels dels quaternions. Les conferències cinquena i sisena demostren la propietat distributiva del producte (quaterniònic) de tres vectors i de tres quaternions qualssevol, per a la qual cosa fa entrar construccions geomètriques damunt l'esfera. Finalment la setena lliçó (que ocupa 357 pàgines!) torna a començar el tractament dels quaternions com a suma de llur part escalar i de llur part vectorial, i així torna a estudiar-ne les propietats associativa i distributiva. En presenta algunes aplicacions a la geometria, a la trigonometria i al càlcul de determinants (un determinant 3 x 3 és la part escalar del producte quaterniònic de tres vectors). Arriba a estudiar el logaritme d'un quaternió (amb un altre quaternió de base), el càlcul diferencial de quaternions i les equacions de primer i de segon grau amb quaternions. La solució general d'aquestes darreres li exigeix la introducció dels biquaternions, o quaternions amb llurs quatre components complexos.

Les *Lectures* foren publicades el 1853 i de seguida en fou patent la dificultat de lectura. L'astrònom John Herschel, de reconeguda destresa matemàtica i prou interessat pels quaternions [cf. GRAVES-1882, *2,* 586-587], escriví a Hamilton el mateix any 1853 dient que les *Lectures* "exigirien dotze mesos per ésser llegides i gairebé tota la vida per ésser païdes" [ibídem, *2,* 683]. I al cap de sis anys, havent-ne tornat a envestir la lectura i no podent passar de la tercera conferència, torna a confessar a Hamilton [ibídem, *3*, 121]: "M'he trobat obligat a abandonar-les amb desesperació. Us vull pregar que escolteu aquesta crida de socors. Estic ben *segur* que, si volguéssiu, *podríeu* exposar tot això d'una manera tan clara que el Càlcul mateix, considerat com un instrument, esdevindria accessible àdhuc a lectors dotats amb menys "poder de penetració" que jo. I un cop dominessin l'*algorisme* i les *convencions* per a poder-hi treballar, aquests lectors estarien més ben preparats per a acompanyar-vos per les interpretacions metafísiques".

Sembla que Hamilton escoltà el crit de socors de Herschel, car projectà el seu segon llibre, *Elements of Quaternions,* com un text fonamentalment pedagògic. De seguida, però, se li complicaren els propòsits i intentà ni més ni menys que emular els "Elements" d'Euclides. El 1862 escriu així al seu amic A. S. Hart [GRAVES-1882, *3*, 139]: "Vull acabar un *Llibre de Consulta* –ja no podrà ésser breu...– però la intenció per part meva i l'esperança pel que fa a altres escriptors és que els *Elements* puguin ésser citats en els treballs o memòries futurs sobre els Quaternions quasi com els *στοιχεῖα* d'Euclides".

Amb aquest nou intent de fer-los esdevenir un llibre de consulta inapel·lable, els *Elements* acabaren també essent massa difícils i massa extensos (una vegada i mitja més llargs que les *Lectures*!). És veritat que el llenguatge metafísic hi és simplificat, encara que no tant com pensa Hamilton quan es vana d'haver-hi fet "només *una* observació metafísica, en les quatre ratlles i mitja d'una nota!") [GRAVES-1882, *3,* 568; cf. HAMILTON-1866, art. 151, nota primera]

Els *Elements* són dividits en tres "llibres": el primer tracta dels vectors i de llur addició; el segon introdueix els quaternions com a quocient de vectors, i no és fins al tercer que no defineix el producte de quaternions i el de vectors, dels quals dóna algunes aplicacions geomètriques i físiques. En un esforç didàctic, indica a la fi de l'índex quins són els fragments bàsics que constitueixen la primera introducció al tema. Aquests comprenen en total dues-centes pàgines i és una experiència interessant fer-ne avui la lectura. Hom hi segueix trobant la concepció "fontal" de Hamilton del vector com a "transport" d'un punt a un altre (o com a diferència entre dos punts) i anàlogament la del quaternió com a rotació i dilatació d'un vector (o com a quocient de dos vectors amb el mateix origen). És curiosa la intuïció concreta del quaternió com a producte (commutatiu!) d'un "versor" –que descriu amb els seus tres paràmetres l'eix i l'angle de rotació– i un "tensor" que descriu amb el seu únic paràmetre la dilatació. A la fi, en arribar al tercer llibre hom troba les expressions explícites del nostre producte escalar i vectorial de dos vectors, en funció dels mòduls que tenen i de l'angle que formen [HAMILTON-1866, art. 281, eqs. VI i XI']. Però aquestes expressions no són intel·ligibles si hom no arriba a superar la distinció, realment filosòfica, entre un "quaternió recte" (és a dir, un quaternió només amb part imaginària o vectorial) i el seu "índex" (és a dir, el vector corresponent) [ibídem, art. 285]. Si no, hom no pot entendre la fórmula "escalar més vector igual a quaternió" ni el terme sinònim de quaternió "gramaritme" (de γραμμή, "ratlla" o "vector", i ἀριθμός, "nombre" o "escalar") [ibídem, art. 292 i la seva nota].

Una altra qüestió de detall que ens complica la lectura actual dels *Elements*, alhora que ens exemplifica com és de difícil puntualitzar per primer cop una convenció científica, és la següent. Hamilton anomena sentit positiu de rotació "cap a la dreta" el que nosaltres diem que és "cap a l'esquerra". La raó n'és que, encara que no ho digui explícitament!, quan considera un caragol "dextrogir" com els nostres no pensa en el sentit en què aquest avança en ésser enroscat, sinó en el sentit indicat pel mànec del tornavís! [ibídem, arts. 111 i 127, i notes de la segona edició].

Entre les aplicacions físiques d'aquest tercer llibre Hamilton desenvolupa una estàtica i una dinàmica de cossos rígids i estudia el sistema newtonià dels planetes i de llurs pertorbacions. Traça, per exemple, l'hodògrafa d'una el·lipse kepleriana i troba simplement un cercle com els de les excèntriques dels antics [ibídem, art. 419]. Les darreres aplicacions que arribà a redactar tracten de les ones lluminoses estudiades per Fresnel i de llur refracció [ibídem, art. 422], i de la polarització de la llum [ibídem, art. 423]. La darrera aplicació física que esperava incloure-hi era l'equació de propagació de la calor [ibídem, art. 422, nota primera], la qual cosa hauria exigit el desenvolupament d'un petit tractat sobre el seu operador diferencial, avui anomenat "nabla". Però morí el 2 de setembre del 1865 i no ho pogué redactar. El seu fill petit, William Edwin, s'encarregà de l'edició pòstuma de l'obra.

La riquesa d'aquestes aplicacions físiques fou desplegada pel seu deixeble P. G. Tait, que Hamilton diguéssim que designà hereu seu en el tron de l'Imperi Quaterniònic. En una nota de l'apartat sobre les ones de Fresnel, redactat els darrers dies de sa vida, diu [ibídem, art. 422, (89), nota]:

"Aquesta equació ... indicada per l'autor com una forma d'equació de l'el·lipsoide, ha estat seleccionada pel seu amic Peter Guthrie Tait, actualment professor a Edimburg, com a base d'un article admirable titulat "Recerques quaterniòniques en relació a la supefície d'ona de Fresnel" ... que el present escriptor pot recomanar amb gran interès, perquè el llegeixin atentament, a tots els estudiosos dels quaternions. No hi ha dubte que el Professor Tait, que ja ha publicat treballs sobre *altres* aplicacions dels Quaternions, tant matemàtiques com físiques, entre les quals n'hi ha algunes sobre Electrodinàmica, està eminentment preparat, a parer d'aquest escriptor, per tal de continuar feliçment i útil aquesta nova branca de la ciència matemàtica, i mereix convertir-s'hi, si l'expressió m'és permesa, en un dels principals successors del seu inventor".

2.3 Publicacions de Tait sobre quaternions

L'escocès Peter Guthrie Tait (1831-1901) complí la missió de successor de Hamilton i d'introductor dels quaternions a la física. Havia estudiat a l'Acadèmia i a la Universitat d'Edimburg, i també a la de Cambridge; a tots tres centres fou company d'estudis de Maxwell. Tingué el primer contacte amb els quaternions el 1853 gràcies a les tot just publicades *Lectures* de Hamilton, de les quals "despatxà amb prou facilitat les sis primeres conferències" [KNOTT-1911, 126]. Però els interessos de Tait eren centrats en la física i col·laborant amb W. J. Steele ja redactava aleshores un primer llibre de Dinàmica. El 1857, quan feia de professor de Matemàtiques a Belfast, la física li despertà l'interès per l'estudi dels quaternions. Segons confià més tard a Hamilton, un article de Helmholtz sobre el moviment de terbolí li féu pensar que aquella expressió de l'operador avui anomenat nabla, que "jo havia admirat feia anys a la pàgina 610 de les vostres *Lectures* ..., em serviria exactament per al meu propòsit" [ibídem, 127]. No trigà a encetar una extensa correspondència epistolar amb Hamilton [ibídem, 141], i el 1859, per suggerència d'aquest, publicà un primer article sobre l'aplicació dels quaternions a les ones de Fresnel.

Aquesta fou la primera de les seves quasi 70 publicacions sobre quaternions [cf. MacFARLANE-1904], entre les quals hi ha dos llibres: *Elementary Treatise on Quaternions* [TAIT-1867 a] i *Introduction to Quaternions* [KELLAND-TAIT-1873]. El primer d'aquests dos, el *Treatise,* té un paper important en la nostra història, car influí directament primer sobre Maxwell i després sobre Gibbs i Heaviside. Indiquem-ne la gènesi i el contingut.

El 1859 els antics companys d'estudis de Cambridge ja encoratjaven Tait a redactar un text sobre quaternions més accessible que les *Lectures* de Hamilton. Però en vista de la seva correspondència amb aquest i dels resultats inèdits coneguts gràcies a aquesta, Tait trobà que era enraonat el "desig de Sir W. Hamilton de fer que el meu volum no aparegués fins a després de la publicació dels seus *Elements*" [TAIT-1867 a, v]; recordem que el 1859 justament és l'any del "crit de socors" de Herschel i que en aquell moment semblava immediata la publicació dels *Elements* en forma pedagògica. Això retardà la publicació del *Treatise* fins a l'any 1867, quan Tait, catedràtic de Filosofia Natural a la Universitat d'Edimburg, publicà en col·laboració amb Lord Kelvin el famós *Treatise on Natural Philosophy* [THOMSON-TAIT-1867], que serà anomenat els *Principia* del segle XIX.

L'*Elementary Treatise on Quaternions* és força més clar i pedagògic que els textos de Hamilton i, gràcies a les moltes aplicacions que conté, també molt més útil. Consta d'onze capítols, els cinc primers més teòrics i els sis darrers dedicats fonamentalment a les aplicacions. Els dos primers capítols, "Vectors i llur composició" i "Productes i quocients de vectors", són un tractat elemental de l'espai vectorial tridimensional fàcilment modernitzable. Hi ha encara, però, empremtes clares del pensament hamiltonià, per exemple quan continua presentant el quocient de vectors com una cosa més fonamental que llur producte. Al tercer capítol són ben clares les expressions que equivalen als nostres productes escalar i vectorial [TAIT-1867 a, n. 96], seguides d'una munió d'aplicacions trigonomètriques. El capítol quart és una introducció breu a la "Diferenciació de quaternions", i el cinquè un tractat extens sobre la "Resolució d'equacions de 1er. grau" en el qual són introduïdes les "funcions vectorials lineals" que originaran els nostres actuals "tensors". Després vénen quatre capítols d'aplicacions geomètriques i dos més d'aplicacions cinemàtiques i físiques. D'aquests, el darrer, especialment extens, té una importància extraordinària. Hom hi tracta l'estàtica i la dinàmica dels cossos rígids, la reflexió i la refracció de les ones de Fresnel, i l'electrodinàmica amperiana. Acaba amb un estudi extens de l'operador de Hamilton avui anomenat "nabla".[15] Mostra el caràcter intrínsec d'aquest "operador de transformació" i n'estudia l'acció sobre funcions escalars i vectorials, que ja havia indicat en el capítol cinemàtic. Amb els noms de "variació més ràpida de la funció", "compressió cúbica" i "eix vectorial de rotació" hi presenta [ibídem, n. 369] els conceptes que equivalen als nostres de gradient, divergència i rotacional. I això no ho és pas tot: enuncia i demostra els teoremes d'integració de divergències i rotacionals. Amb el nom d'"equació fonamental" ens dóna el teorema avui anomenat de Gauss-Ostrogradsky [ibídem, n. 467], i com a aplicació d'aquest obté el que ja anomena "teorema de Green" [ibídem, n. 469]. El teorema de Stokes també hi és demostrat i fa referència a l'examen on sembla haver estat enunciat per primer cop per tal de demanar-ne la demostració [ibídem, n. 477; cf. STOKES-1854].

15. El terme "nabla" designa una arpa assíria que tenia una silueta que recorda aquest símbol. Sembla que fou suggerit a Tait per Robertson Smith [KNOTT-1911, *1*, 143]. Maxwell només emprà aquest nom en una "Oda tindàlica al gran virtuós de la nabla", és a dir, a Tait [ibídem, 171-174]. Aquest mateix símbol ha rebut els noms d'"atled", invers de "delta" [ibídem, 143], i de "del" [WILSON-1901].

Aquests teoremes i llurs aplicacions foren ulteriorment treballats per Tait [TAIT-1870 a, b], però llur presentació en el *Treatise* del 1867 és fonamental per a la nostra història.[16] Aquí és on foren estudiats per Maxwell. És a aquests fragments que al·ludeix Tait quan li escriu el 13 de desembre del 1867 [TAIT-1867b]: "Si llegeixes les darreres 20 o 30 planes del meu llibre em sembla que et convenceràs que val la pena introduir els quaternions ["4ions"], car mostren com en aquest tema de la nabla ("◁") es disparen com llampecs lubrificats".

3. Del càlcul de quaternions a l'anàlisi vectorial

Vegem com Maxwell, per a la seva formulació nova de l'electrodinàmica, tria del càlcul de quaternions certs elements geomètrics il·lustratius. Seguint aquesta orientació Gibbs i Heaviside crearan una anàlisi vectorial despresa de conceptes quaterniònics, en la qual desplegaran la nostra electrodinàmica clàssica.

3.1 Maxwell i la traducció il·lustrativa dels quaternions

James Clerk Maxwell (1831-1879), compatrici i company d'escola de Tait, creà la seva teoria electromagnètica durant la dècada 1855-1864, mentre Tait rebia de Hamilton l'herència quaterniònica. En cap dels tres articles [MAXWELL-1856, -1861, -1864] que determinen el procés de gènesi de la teoria electromagnètica no apareix el concepte de quaternió. Per molt que la noció de camp de forces, amb la seva "direcció" i la seva "intensitat" [MAXWELL-1856, *158], sigui a l'origen de la creació de Maxwell inspirada en Faraday, la formulació vectorial és totalment absent d'aquests tres articles.[17] Les "equacions generals" del camp electromagnètic que en són la culminació [MAXWELL-1864, 554-561] hi seran formulades sobre els components de cada un dels vectors, encara que això li faci emprar unes quantes dotzenes de lletres majúscules i minúscules, llatines i gregues.

La invitació de Tait del 1867 perquè estudiï al final del seu *Treatise* "l'afer de la nabla" féu efecte al cap d'un parell d'anys. En una al·locució del 1870 a matemàtics i físics de la British Association anuncia el seu interès físic pels "vectors" de Hamilton i per una remodelació del "càlcul de quaternions" que han de dur a terme homes de tipus físic il·lustratiu (i no

16. La història del teorema de la divergència ha estat estudiada fa poc per STOLZE-1978. Les primeres formulacions del teorema són, en forma cartesiana, OSTROGRADSKY-1831 i GAUSS-1840. Vegeu però també GAUSS-1813 i àdhuc LAGRANGE-1760. Teoremes relacionats dóna GREEN-1828. El primer enunciat del teorema del rotacional és STOKES-1854.
17. Hi manca totalment la noció de producte, escalar o vectorial, de dos vectors, que serà introduïda després com a part escalar o vectorial de llur producte quaterniònic. Hi ha una anomalia curiosa que és que en el tercer d'aquests treballs apareix l'operador de Laplace en la forma ∇^2, cosa que pressuposa un cert producte escalar de vectors, distint, pel signe, del producte quaterniònic [MAXWELL-1864, eqs. (63) a (79)].

matemàtic simbòlic). És una visió profètica de la futura anàlisi vectorial [MAXWELL-1870, 220]:

"... només esmentaré el nom d'aquesta classe important de magnituds dirigides en l'espai, que Hamilton ha anomenat vectors i que són l'objecte del Càlcul de Quaternions, branca de les matemàtiques que, quan hagi estat assimilada del tot per homes de tipus il·lustratiu i vestida per ells amb imatgeria física, esdevindrà, potser amb algun altre nom, el mètode més poderós de comunicar veritable coneixement científic a persones aparentment desproveïdes de l'esperit de càlcul".

Amb aquesta orientació el 1870 Maxwell s'aplica a l'afer de la nabla. És conscient que introduint les idees intuïtives d'allò que avui anomenem "laplaciana", "gradient", "divergència" i "rotacional", i batejant-les amb noms que il·lustrin aquestes idees, hom pot eliminar allò que té d'abstracte el simbolisme quaterniònic. És notable la responsabilitat lexicogràfica amb què entaula consultes per tal de trobar aquests noms. Fa consultes al seu amic Tait, que tracta com una divinitat de l'Olimp quaterniònic [KNOTT-1911, 143]: "Ve't aquí alguns noms toscament treballats. ¿No voldries pas tu, com a divinitat bondadosa, donar la forma escaient a llurs contorns perquè encaixin bé?...". Heus ací els seus primers suggeriments per a designar la part escalar i la vectorial del producte quaterniònic de l'operador nabla per un camp vectorial, o sia, la nostra actual divergència (canviada de signe) i el nostre actual rotacional [ibídem]: "La part escalar jo l'anomenaria Convergència ["Convergence"] de la funció vectorial, i la vectorial l'anomenaria Torsió ["Twist"] de la funció vectorial. Però en aquest context la paraula torsió no té res a veure amb un caragol ["screw"] o una hèlice ["helix"]. Si les paraules *volta* o *versió* [*"turn* or *version"*] servissin serien millors que torsió, car torsió suggereix la idea de caragol. Giravolt ["twirl"] és lliure de la connotació de caragol i és ben llampant. Però potser és massa dinàmica per a matemàtics purs; o sigui que, per amor a Cayley, en diré Bucle ["Curl"]...".

Encara amplià la consulta lexicogràfica en ocasió de la seva conferència a la Societat Matemàtica de Londres [MAXWELL-1871, 263-265]:

"Acabaré proposant a la consideració dels matemàtics certes frases que expressin els resultats d'aplicar l'operador de Hamilton[18] ∇. Estaré molt agraït a tot aquell que em faci suggeriments sobre aquest tema, car sóc conscient que l'autoritat onomàstica és migrada per part meva, i només pot ésser exercida amb èxit dins de societats...

"I en primer lloc proposo que el resultat d'aplicar ∇^2 (operador de Laplace amb signe negatiu) sigui anomenat la *Concentració* [*"Concentration"*] de la quantitat a la qual és aplicat...

"... per a una funció escalar P ... La quantitat ∇P és un vector que indi-

18. La reedició de MAXWELL-Papers aquí posa Δ. El context fa evident que es tracta d'una errada.

ca la direcció en què P disminueix més de pressa, i mesura en quina proporció disminueix. Gosaré, amb molt de recel, anomenar això el *declivi* [*"slope"*] de P. La *magnitud* de ∇P és anomenada per Lamé el "primer paràmetre diferencial" de P, però la direcció no és inclosa en la seva concepció. Necessitem un mot vectorial que expressi totes dues coses, direcció i magnitud, i que ja no sigui emprat en algun altre sentit matemàtic. M'he pres la llibertat d'estendre el sentit orginari del mot 'declivi' generalitzant a l'espai de tres dimensions la seva accepció topogràfica, que únicament considera dues variables independents.

"Si σ representa una funció vectorial, $\nabla\sigma$ pot contenir alhora una part escalar i una de vectorial, que escriurem $S\nabla\sigma$ i $V\nabla\sigma$ respectivament. Proposo que la part escalar sigui anomenada la *Convergència* [*"Convergence"*] de σ ... Crec que la convergència d'una funció vectorial és un nom molt escaient per a designar el fet que allò transportat per la funció vectorial penetra, allí, cap a un punt.

"Però en general $\nabla\sigma$ també té una part vectorial, i proposo, encara que amb molt de recel, que aquest vector sigui anomenat el *Bucle* o la *Versió* [*"Curl* or *Version"*] de la funció vectorial original. Representa la direcció i la magnitud de la rotació d'allò transportat pel vector σ. He estat cercant un mot que no connoti ni moviment, com ara Rotació, Terbolí o Giravolt ["Rotation, Whirl or Twirl"] ni estructura d'hèlice o caragol, com ara Torsió ["Twist"], que no corresponen de cap manera a la natura d'un vector".

I el seu interès il·lustratiu li fa dibuixar esquemàticament la variació del camp al voltant d'un punt quan hi existeix una convergència positiva, o un bucle en sentit positiu, o totes dues coses alhora.

Més que la terminologia concreta és interessant la intenció que té Maxwell quan la introdueix. Aquesta intenció traspua del final de la conferència. Amb la terminologia acabada de proposar hi enuncia quatre proposicions per l'estil d'aquesta: "El declivi d'una funció escalar no té bucle" (expressat en termes actuals, "el rotacional del gradient és nul"). I afirma que "aquestes proposicions són la traducció ["translation"]... de les expressions quaterniòniques donades pel Prof. Tait..." [cita TAIT-1862, -1870a i -1870b primera part].

Creiem que la cosa més important de l'aportació de Maxwell al càlcul de quaternions és aquesta "traducció", el fet de tornar a expressar els teoremes quaterniònics del seu amic Tait en un llenguatge il·lustratiu amb "mots vectorials". I des d'aquesta perspectiva seva interpreta les invencions de Hamilton, tal com ho expressa al començament d'aquesta mateixa conferència [MAXWELL-1871, 259]: "Una distinció importantíssima fou la feta per Hamilton en dividir les quantitats usuals en quantitats Escalars ... i Vectors ...

"La invenció del càlcul de Quaternions és un pas endavant devers el coneixement de quantitats relacionades amb l'espai, la importància del qual només pot ésser comparada amb la invenció cartesiana dels terns de coordenades. Les idees d'aquest càlcul, a diferència de les operacions i els símbols, són adequades per a ésser de moltíssima utilitat en totes les branques de la ciència".

Aquesta prevenció contra les "operacions i els símbols" del càlcul de quaternions explica l'actitud prudent de Maxwell respecte a llur ús en el seu cèlebre *Treatise*, el "Tractat d'Electricitat i Magnetisme" [MAXWELL-1873a]. La seva decisió és ben expressada en una carta al seu amic Tait del 14 de novembre del 1870 [KNOTT-1911, 144]: "Pel que fa al meu pla d'entrar en Hamilton: contaminaré el meu llibre d'idees hamiltonianes, sense fer les operacions en forma hamiltoniana, per a la qual no estem madurs ni jo ni, em fa l'efecte, els lectors. Ara bé, la idea hamiltoniana de vector és inefable, igual que les d'addició i multiplicació de vectors".

Aquest criteri d'equilibri és clarament formulat en el capítol preliminar del seu *Treatise*, en el qual torna a descobrir la seva versió il·lustrativa dels quaternions [MAXWELL-1873a, *1*, 9]:

"Però en molts casos per al raonament físic, en contraposició al càlcul, és millor no introduir explícitament les coordenades cartesianes, i fixar immediatament el pensament ... en la magnitud i la direcció d'una força, en comptes de fixar-lo en els tres components d'aquesta. Aquesta manera de considerar quantitats geomètriques i físiques és més primitiva i més natural que l'altra, encara que les idees relacionades amb aquesta no hagin rebut un desenvolupament complet abans que Hamilton hagués fet el gran pas següent en le tractament de l'espai mitjançant la invenció del Càlcul de Quaternions.

"Com que els mètodes de Descartes encara són els més familiars als estudiants de ciències, i com que encara són els més útils pel que fa al càlcul, expressarem tots els nostres resultats en forma cartesiana. Ara bé, estic convençut que la introducció de les seves idees, en contraposició a les seves operacions i mètodes quaterniònics, ens serà de molta utilitat per a l'estudi de cada part del nostre tractat i, especialment, per a l'electrodinàmica, en la qual hem de fer anar un cert nombre de quantitats físiques, les relacions mútues de les quals poden ésser expressades amb molta més senzillesa mitjançant poques expressions hamiltonianes que no mitjançant equacions ordinàries".

Aquestes expressions hamiltonianes són de tipus vectorial. Per això remarca en aquest mateix capítol preliminar la importància del concepte de vector (relacionant-lo amb les forces de la dinàmica newtoniana) i àdhuc la d'una terminologia vectorial [ibídem, 10]:

"Un dels resultats més importants del mètode hamiltonià és la divisió de les quantitats en Escalars i Vectors...

"L'addició d'una quantitat vectorial amb una altra de la mateixa espècie es fa segons la regla donada en Estàtica per a la composició de forces...

"Quan volguem denotar una quantitat vectorial mitjançant un sol símbol i cridar l'atenció sobre el fet que és un vector i que n'hem de considerar per tant la direcció a més de la magnitud, ho farem amb una lletra gòtica majúscula: $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, etc.".

En aquest context també subratlla la importància d'allò que ara anomenem tensors [ibídem]:

"També hi ha un altre tipus de quantitats físiques relacionades amb les direccions de l'espai però que no són vectors. En són exemples les tensions i els esforços ["stresses and strains"] dins els cossos sòlids, i també algunes propietats dels cossos estudiades en la teoria de l'elasticitat i en la teoria de la doble refracció. Les quantitats d'aquest tipus necessiten per a ésser definides *nou* especificacions numèriques. En el llenguatge dels quaternions són expressades com funcions lineals i vectorials d'un vector".

Al cap de poques planes [ibídem, 16] introdueix per primera vegada el símbol nabla (que anomena simplement operador ∇) per a definir allò que ara anomenem gradient d'una funció escalar. Tot seguit [ibídem, 18-29] enuncia i demostra quatre teoremes d'integració: els teoremes I i II sobre integracions lineals del potencial (en regions acícliques o cícliques respectivament), el teorema III, que avui té el nom de Gauss-Ostrogradsky (i del qual Maxwell no cita pas cap referència), i el teorema IV, anomenat avui de Stokes (sobre l'enunciat del qual Maxwell cita STOKES-1854 –examen que havia estat proposat al mateix Maxwell a fi d'obtenir el premi Smith– i sobre la demostració del qual cita THOMSON-TAIT-1867, art. 190 (j)). Però, fidel a les seves consignes, enuncia i demostra aquests teoremes sense fer servir gens l'operador nabla ni la notació vectorial. I tot seguit [ibídem, 30] enuncia amb la nova terminologia els teoremes III i IV, després d'haver presentat amb detall l'acció de l'operador nabla sobre una funció vectorial.

Vegem en aquest context quin fruit donaren per a la posteritat les seves consultes lexicogràfiques[19] [ibídem, 30-31 i 16]:

"Proposo doncs que la part escalar de $\nabla\sigma$ sigui anomenada la *convergència* [*"convergence"*] de σ en el punt P...

"... el vector $\mathcal{F}$, l'anomenaré variació espacial ["space-variation"] de la funció escalar ψ, emprant la frase (en oposició a Lamé) per a indicar tant la direcció com la magnitud de la disminució més ràpida de ψ.

"... ∇^2 ... operador que apareix en totes les branques de la Física, al qual ens referirem com a operador de Laplace... Proposo doncs anomenar ∇^2 q la *concentració* [*"concentration"*] de q en el punt P...".

Esmentem de passada de quina manera Maxwell deixa ben clara la nostra definició actual de sentit positiu de girada. Ho fa així, en l'article que precedeix el teorema de Stokes [ibídem, 25-26]:

19. Així quedà en la segona edició del *Treatise*, de 1881, les proves d'impremta de la qual havien estat corregides fins al capítol 9 pel mateix Maxwell [cf. pròleg de Niven, ibídem p. XIII]. La primera edició de 1873 en lloc de "rotació" encara proposava (i "amb molt de recel") els termes "bucle o versió" ("curl or version") i en lloc de "variació espacial", "declivi" ("slope").

"En aquest tractat un moviment de translació al llarg d'un eix i un altre de rotació al voltant del mateix eix direm que són, per hipòtesi, del mateix signe si llurs sentits corresponen als de la translació i la rotació d'un caragol ordinari dextrogir".

Aquí fica una nota a peu de plana curiosa, sobre la imatge muscular de la rotació i l'avanç dextrogir de la mà dreta, sobre els circells de la parra i del llúpol, que són respectivament dextrogirs i levogirs, sobre la bona terminologia introduïda en l'òptica i, àdhuc, sobre l'ús de caragols levogirs. I continua:

"Per exemple, si considerem positiva la rotació real de la terra de ponent a llevant, llavors el sentit de l'eix de la terra de sud a nord ha d'ésser considerat positiu. I si un home camina endavant en sentit positiu, llavors la rotació positiva és amb aquest ordre: cap, mà dreta, peus, mà esquerra...

"Aquest és el sentit dextrogir adoptat per Thomson i Tait en llur *Natural Philosophy* [THOMSON-TAIT-1867], i per Tait als seus *Quaternions* [TAIT-1867a]. El sistema oposat o levogir és l'adoptat pels *Quaternions* de Hamilton [HAMILTON-1853, 76; -1866, 108 i 117 nota]. L'operació de passar d'un sistema a l'altre és anomenada per Listing *Perversió* [*"Perversion"*].

"La reflexió d'un objecte en un mirall és una imatge pervertida de l'objecte.

"... en un sistema dextrogir..., si hom dibuixa x cap a l'est i y cap al nord, z hi ha d'ésser dibuixat cap amunt...".

I és curiós que, en reeditar el *Treatise* el 1891, J. J. Thomson inclogués aquí una figura de tríade dextrogira totalment ambigua.

Al llarg de tot el *Treatise* i àdhuc en el capítol culminant on presenta les famoses "Equacions generals del camp electromagnètic" Maxwell romangué fidel als seus criteris de no pressuposar cap coneixement quaterniònic. Així doncs, formularà i discutirà aquestes equacions en funció de cadascuna de les components dels onze vectors que hi intervenen [MAXWELL-1873a, *2*, 246-256]. Però just després donarà l'expressió vectorial de les fórmules, justificada amb la introducció següent [ibídem, 257]: "En aquest tractat hem fet l'esforç d'evitar qualsevol raonament que exigís del lector un coneixement del Càlcul de Quaternions. Però tampoc no hem tingut cap escrúpol a l'hora d'introduir la idea de vector, quan era necessari fer-ho. Quan hem tingut l'ocasió de denotar un vector per mitjà d'un símbol, hem emprat una lletra gòtica, car el nombre de vectors diferents és tan enorme que els símbols preferits per Hamilton s'haurien exhaurit de seguida. Així doncs, sempre que emprem una lletra gòtica, aquesta denota un vector hamiltonià, i no n'indica solament la magnitud sinó també la direcció". I així anirà traduint al nou llenguatge vectorial amb l'alfabet gòtic cada un dels terns d'equacions escrites amb els alfabets grec i llatí, que representen components de vectors. Ho farà amb la frase estereotipada "les tres equacions... la primera de les quals era... ara resulten...".

Jutjant-lo des de la nostra mentalitat vectorial actual, Maxwell és massa tímid pel que fa a l'ús de la seva clara intuïció geomètrica. Aquests apèndixs vectorials ens semblen raquítics i com si diguéssim sobreafegits per a ús exclusiu d'alumnes excepcionals. Aquesta impressió fa massa contrast amb la valoració de la "doctrina dels vectors" que expressa simultàniament en una recensió anónima[20] del nou tractat elemental de quaternions [KELLAND-TAIT-1873]. Escriu això a *Nature* [MAXWELL-1873b]: "Ara bé, els Quaternions, o la doctrina dels Vectors, és un mètode matemàtic, però és un mètode de pensar i no un mètode d'estalviar pensament, almenys per a la generació present... Ens obliga a cada instant a fer-nos una imatge dels trets geomètrics representats pels símbols, de tal manera que, quan estudiem geometria amb aquest mètode, tenim el cervell ocupat amb idees geomètriques i no ens és permès d'imaginar-nos que som geòmetres quan som purs aritmètics".

D'altra banda Maxwell, cap al final de la seva vida, critica directament el concepte de quaternió. Aquesta crítica és expressada vívidament en una carta al seu amic Tait, del 1878. Entra en el tema dels quaternions amb una imatge famosa: "¿Es pot llaurar amb un bou i un mul junyits al mateix jou?" [KNOTT-1911, 151]. Pondera tot seguit les confusions que provoca el signe negatiu que apareix en la part escalar del producte quaterniònic i àdhuc en la norma de qualsevol vector. El seu desig seria alliberar els vectors d'aquest caràcter imaginari amb què apareixen incrustats en quaternions. Així ho expressa, clarament, en la pregunta següent [ibídem]: "¿Cal negar als cartesians la idea de vector com a cosa sensible en la vida real, fins que arribin a reconèixer en una escala mètrica una certa arrel de -1 entre tot un curiós conjunt d'aquestes?".

Diguem, a guisa de conclusió, que Maxwell entengué clarament les idees il·lustratives, vectorials, amagades en el càlcul de quaternions, i les difongué àmpliament amb el seu *Treatise*. Però les explotà amb massa timidesa, potser per por de la innovació matemàtica, o potser perquè no podia acabar d'eliminar el caràcter imaginari d'aquests vectors. Altres en rebran la inspiració i duran a terme aquesta empresa de desplegar una pura "doctrina dels Vectors".

3.2 Gibbs i les seves notes d'Anàlisi Vectorial

Josiah Willard Gibbs (1839-1903), alumne i després professor de la Universitat de Yale, fou el primer doctor en Enginyeria dels Estats Units [WHEELER-1962, 32]. És sens dubte al seu sentit pràctic d'americà i d'enginyer que hom deu la transformació radical del Càlcul de Quaternions en Anàlisi Vectorial. Els seus famosos treballs de Mecànica Estadística foren publicats a l'Acadèmia de Connecticut cap als anys 1876-1878, però no en

20. Que la recensió és de Maxwell ho testimonia MacFARLANE-1904 i KNOTT-1911, *I*, 115.

fou reconegut el mèrit fins al cap d'uns quinze anys, quan Ostwald els féu conèixer el món alemany [cf. ibídem, cap. 6].

Les obligacions docents li exigiren que impartís un curs, el 1877, d'Electromagnetisme, per al qual emprà el modern *Treatise* de Maxwell [MAXWELL-1873a; cf. WHEELER-1962, 62]. Aquest text de Maxwell fa que s'interessi pel càlcul de quaternions que hi és emprat i que descobreixi que "la idea de quaternió era totalment estranya al tema", cosa que el porta a reelaborar des del començament una versió exclusivament vectorial d'aquest càlcul. El 1879 ensenya Anàlisi Vectorial, com a mètode matemàtic de l'Electromagnetisme, i el 1881 imprimeix privadament unes notes titulades "Elements d'Anàlisi Vectorial" [GIBBS-1881]. Vegem, abans d'anatlizar-les, com el mateix Gibbs ens en descriu la gènesi en una carta del 1888 de la qual conservem l'esborrany [WHEELER-1962, 107-108]:

"El primer contacte amb els quaternions el vaig tenir llegint l'Electricitat i Magnetisme de Maxwell, on són emprades sovint notacions quaterniòniques. Em vaig arribar a convèncer que, per tal de dominar aquests temes, calia començar dominant aquests mètodes. Simultàniament em vaig adonar que, per molt que aquests mètodes fossin anomenats quaterniònics, la idea de quaternió era totalment estranya al tema. Respecte al producte de vectors em vaig fixar que s'hi tractava de dues funcions importants (dos productes) anomenades part vectorial i part escalar del producte, i que la unió de totes dues per a formar l'anomenat producte (total) no constituïa cap procés de la teoria com a instrument de recerca geomètrica. I un altre cop, en tractar de l'operador ∇ aplicat a un vector, em vaig fixar que la part vectorial i la part escalar del resultat representaven operacions importants però que no semblava pas una idea vàlida reunir-les (generalment per a tomar-les a separar després). Això de fet no és res més que una repetició de l'observació anterior, car l'operador és definit per mitjà de la multiplicació de vectors i doncs un canvi de la idea d'aquesta multiplicació comportarà un canvi de l'ús de l'operador ∇.

"Així doncs vaig començar a trevallar *ab initio* l'àlgebra dels dos tipus de multiplicació, les tres operacions diferencials ∇ (per aplicació a un escalar i per aplicació a un vector segon dues operacions diferents) i aquelles funcions, o més ben dit operadors integrals, que (sota certs límits) són l'invers de les dites operacions diferencials, i que representen un paper important en diverses especialitats de Física Matemàtica. A aquests temes fou afegit el de les funcions lineals vectorials, que també és prominent en l'Electricitat i Magnetisme de Maxwell.

"Tot això al final vaig imprimir-ho, encara que mai no ho vaig publicar. Però en vaig distribuir força exemplars entre persones que a parer meu podien tenir-hi interès. El meu retard i la meva vacil·lació en això foren principalment deguts a la dificultat de fer-me una opinió sobre detalls de notació, pròpiament menuderies, però en els quals més val no introduir canvis si no cal".

Aquestes notes "impreses però no publicades" [GIBBS-1881], encara que escrites en un estil molt condensat, constitueixen el primer tractat d'"anàlisi vectorial". En la impressió de 1881 constaven de dos capítols: "Sobre l'àlgebra de vectors" i "Sobre el càlcul diferencial i integral de vectors". En el primer hom estudia les operacions elementals: suma de vectors, producte per un escalar i, sobretot, els dos tipus de producte de dos vectors, que Gibbs anomena "directe" i "esbiaixat" ("direct" i "skew") i que avui anomenem producte escalar i vectorial. I hi introdueix àdhuc, per tal de distingir-los, els símbols avui usuals del punt i l'aspa ("$\alpha \cdot \beta$" i "$\alpha \times \beta$"). En el segon capítol hom introdueix les tres accions de l'operador vectorial "nabla", amb aquest mateix terme, avui usual, i els teoremes d'integració de Gauss, Stokes i Green.

Tres capítols més seran afegits a aquests dos en la versió del 1884. Hom hi estudia, tal com deia Gibbs a la seva carta, les "Funcions lineals vectorials", a saber, allò que avui anomenem "tensors". Hom hi introdueix primer el parell de vectors o "díade" ("dyad") i després la combinació lineal d'aquests parells o "diàdica" ("dyadic"), a saber, allò que ara anomenaríem tensors descomponibles o no-descomponibles respectivament. Aplica aquests tensors especialment a l'estudi de rotacions i de tensions. I el breu capítol final tracta de les funcions d'aquests tensors i dels "bivectors" o vectors amb components complexos.

Durant les dues darreres dècades del segle Gibbs anà impartint cada cop més sovint un curs d'Anàlisi Vectorial que arribà a constar de 90 lliçons [WILSON-1931]. Un alumne del seu curs de 1899-1900, E. B. Wilson, fou encarregat per Gibbs de preparar l'edició d'un "Llibre de text per a ús d'estudiants de matemàtiques i física", el títol principal del qual era "Anàlisi Vectorial" [WILSON-1901]. Aquest text hom pot dir que és la versió publicada de les concentrades notes de Gibbs, per molt que Wilson hi hagi introduït moltes modificacions, dividit en dos el capítol inicial i il·lustrat amb una munió d'exemples geomètrics o físics cada un dels capítols.

Gibbs també publicà uns quants articles sobre el tema, dels quals n'esmentarem dos. Un que tracta en general "Sobre l'àlgebra múltiple" [GIBBS-1886], de la qual recull la història, subratllant l'interès de l'obra de Grassman per tot allò que fa a fonamentació geomètrica, mentre que "en mecànica, cinemàtica, astronomia, física o cristal·lografia... rarament serà desitjable l'anàlisi puntual de Grassman" [ibídem, 115]. L'altre article versa sobre aplicacions astronòmiques, en concret "Sobre la determinació d'òrbites el·líptiques a partir de tres observacions completes" [GIBBS-1889]. Tal com escriurà el mateix Gibbs [GIBBS-Papers *2*,149]: "L'objecte del meu article era de mostrar als astrònoms, que són força conservadors..., els avantatges d'emprar notacions vectorials, que jo he après de Maxwell en allò que fa a la física". Aquest "mètode vectorial de Gibbs" fou usat immediatament en astronomia [BEEBE-PHILLIPS-1889].

Mirant les coses fredament, aquests treballs de Gibbs que creen l'anàlisi vectorial no representen pas cap esforç revolucionari contra els treballs de Tait i l'escola quaternionista. Les seves primeres notes, no n'hi ha dubte, no ho pretenen, tal com ho testimonia la introducció [GIBBS-1881, 17]: "Els principis fonamentals de l'anàlisi que presentem tot seguit són els mateixos que ja són familiars als estudiosos dels quaternions, amb una forma lleugerament diferent. La manera de desplegar el tema és una mica diferent de la que hom segueix en els tractats sobre quaternions, car en el pla de l'autor no cal emprar per a res el concepte de quaternió...". Però aquesta eliminació del concepte de quaternió fou interpretada como una ofensa sacrílega pels defensors del quaternionisme. Tait escriví, en la introducció de la tercera edició del seu "Tractat elemental de quaternions", preocupat per l'estroncament que veia del progrés quaterniònic [TAIT-1867a, [3] 1890]: "...aquells que treballent aquest tema han estat més atents a modificar-ne la notació, o la manera de presentar-ne els principis fonamentals, que no pas a estendre les aplicacions del càlcul. Àdhuc el Prof. Willard Gibbs ha d'ésser considerat un dels endarreridors del progrés quaterniònic, degut al seu fullet sobre *Anàlisi Vectorial,* una espècie de monstre hermafrodita que fa una barrija-barreja de les notacions de Hamilton i de Grassman".

Gibbs no trigà a defensar-se, encetant així a la revista *Nature* una llarga discussió entre quaternionistes i vectorialistes [cf. BORK-1966; CROWE-1967a, cap. 6]. A l'extens article d'abril del 1891 Gibbs respon directament a la crítica de Tait, mostrant com, de fet, es tracta d'una qüestió de nocions més que no de notacions i com, per a l'anàlisi vectorial, la noció de quaternió és supèrflua i la visió quaternionista relativa [GIBBS-1891a]:

"La vostra crítica al·ludeix especialment a les meves notacions, però em fa l'efecte que sota el problema de les notacions s'amaga un problema, més profund, de nocions. En efecte, si els meus disbarats solament haguessin estat una qüestió de notació, descriure la meva obra com una monstruositat hauria estat menys precís que no qualificar-ne de bast el vestit.

"... No veig argument sòlid a favor de considerar el producte quaterniònic de dos vectors una noció *fonamental* de l'anàlisi vectorial... Igualment pel que fa al quocient quaterniònic i al quaternió en general.

"... Aquestes consideracions basten, a parer meu, per a mostrar que la posició del quaternionista no és l'única des de la qual hom pot contemplar el tema de l'anàlisi vectorial, i que un mètode que des d'un punt de vista seria monstruós, pot ésser normal i inevitable des d'un altre..."

És curiós que en aquest context Gibbs faci notar, entre altres avantatges de la formulació vectorial damunt la quaterniònica, el fet que aquella pot ésser estesa fàcilment "a l'espai de quatre o més dimensions" i aquesta no [ibídem]. Aquesta afirmació tan òbvia des de la nostra perspectiva física actual llavors resultava inintel·ligible. Tait, en la resposta breu i immediata a Gibbs, preguntà retòricament: "¿Què tenen a veure els estudiants de física, com a tals, amb un espai de més de tres dimensions?" [TAIT-1891].

Però el punt central de la nova crítica de Tait és la manca d'originalitat, car, segons ell, les "enginyosíssimes notacions suggerides pel Prof. Gibbs" condueixen més breument a "resultats *ja obtinguts*" [ibídem]. El mes següent Gibbs tornarà a insistir sobre el seu punt central de la inutilitat del quaternió [GIBBS-1891b]:

"¿Quina importància tenen els avantatges aconseguits mitjançant l'ús del quaternió?... En la majoria dels casos aquests avantatges són o dubtosos o insignificants".

La discussió entre ambdós punts de vista encara s'allargà tres anys. Hi tercerejarà Heaviside, que, a l'altra banda de l'Atlàntic, havia seguit un camí anàleg al de Gibbs.

3.3 Heaviside i el seu capítol d'Àlgebra i Anàlisi Vectorials

Oliver Heaviside (1850-1925) era un londinenc de família senzilla que no arribà a fer-se una formació universitària. Als divuit anys començà a treballar de tècnic de telègrafs [APPLEYARD-1930]. Però els problemes tècnics de l'ofici l'inclinaren a l'estudi, a la publicació d'articles de caràcter pràctic i, finalment, a una autèntica recerca. El 1873 li arribà a les mans l'aleshores acabat de publicar *Treatise* de Maxwell, que ell haurà de perfeccionar harmonitzant el tractament del camp elèctric i del magnètic i racionalitzant el sistema d'unitats. Els seus treballs electromagnètics li valgueren l'ingrés a la Reial Societat de Londres el 1891.

El mateix Heaviside reconstrueix l'itinerari que el portà de l'electromagnetisme a una àlgebra de vectors obtinguda "mitjançant l'eliminació i la simplificació" de "la quaterniònica" de Hamilton i Tait. Amb la seva gràcia literària, comença amb la trista història d'un xicot que, determinat a dominar els quaternions, es reclou en els textos de Hamilton i sucumbeix en la confusió d'aquells vectors de quadrat negatiu, tot per "haver encetat l'estudi dels Quaternions massa d'hora". I continua [HEAVISIDE-1893a, vol. 3, 135-137]:

"La meva pròpia introducció a la quaterniònica es produí d'una manera molt diferent. Maxwell, al seu tractat, mostrava els resultats bàsics en forma quaterniònica. Vaig acudir al tractat del Prof. Tait per tal d'obtenir-ne informació i aprendre a treballar-hi. Vaig tenir les mateixes dificultats que el jove traspassat, però, deixant-les de banda, vaig poder veure que la quaterniònica podia ésser emprada de manera consistent en el treball amb vectors. Ara, en posar-me a aplicar la quaterniònica al desplegament de la teoria elèctrica, li vaig trobar molts inconvenients. La quaterniònica, en els seus aspectes vectorials, era antifísica i antinatural, i no concordava amb la matemàtica ordinària escalar. O sigui que vaig eliminar del tot el quaternió i em vaig dedicar als purs escalars i vectors, emprant en els meus articles, a partir del 1883, una àlgebra vectorial molt senzilla.

"... Fins al 1888 em pensava que jo era l'únic que treballava explícitament amb vectors sobre principis físics. Però en aquest any vaig rebre un exemplar de l'Anàlisi Vectorial del Prof. Gibbs (no publicat, 1881-4). Era una mena de sinopsi concentrada d'un tractat. Encara que l'aparença en fos diferent, essencialment era la mateixa àlgebra i anàlisi vectorial a què jo havia anat a parar".

En efecte, als seus articles d'electricitat, hi van apareixent esporàdicament elements de càlcul vectorial inspirats en Maxwell i independents de Gibbs. N'hi ha tres [HEAVISIDE-1882, -1883a, b] on apareixen respectivament: la noció de rotacional ("curl") definit per la seva integral de Stokes, la noció de "producte [escalar] de dues quantitats vectorials" i l'operador ∇ amb les diverses aplicacions d'aquest (la "divergence"[21] o "div", el "curl" i la "space-variation"). Al cap d'un parell d'anys uns altres dos articles [HEAVISIDE-1885a, b] donen respectivament: la definició de producte vectorial (indicat amb el símbol V hamiltonià) i un primer resum del seu "mètode de vectors, que sembla que és l'únic mètode apropiat". En articles força posteriors presenta altres resums del seu mètode, que descriu així [HEAVISIDE-1892, *529]:

"És enterament basat en molt poques definicions, i pot ésser considerat ... un mètode cartesià de recerca sistemàticament abreujat, i pot entendre'l i emprar-lo pràcticament qui sigui que estigui acostumat a les coordenades cartesianes, sense cap estudi de la difícil ciència dels Quaternions. Consisteix simplement en els elements dels Quaternions però sense quaternions, amb la notació simplificada tant com és possible i eliminant el desagradabilíssim signe *menys* dels productes escalars".

A més d'aquests articles, reeditats tots junts el 1892 [HEAVISIDE-Papers], Heaviside anà publicant un famós llibre en tres volums, *Teoria electromagnètica* [HEAVISIDE-1893a]. El capítol tercer, "Els elements de l'àlgebra i l'anàlisi vectorial" [ibídem, *1*, 132-305], constitueix un tractat complet i pràctic sobre aquest tema. Hi dedica unes vint pàgines a definir la suma i els productes de vectors, i unes cinquanta a definir-ne la integració, l'operador nabla i les diverses accions i teoremes d'integració d'aquest. La resta, gairebé cent pàgines, és dedicada a aplicacions físiques, que introdueixen tota una sèrie de problemes electromagnètics, a partir de l'estudi d'un sòlid elàstic.

Aquest tercer capítol de la Teoria electromagnètica de Heaviside és responsable, juntament amb les notes d'*Anàlisi Vectorial* de Gibbs, de l'acceptació dels vectors pel món científic. N'espipellejarem uns quants fragments de les deu planes introductòries i de les cinc pàgines conclusives, d'aquest capítol de Heaviside, que ens permetran de capir la tensió humana d'aquesta acceptació. També confiem que obriran la gana del lector d'assaborir més extensament l'estil deliciós de Heaviside, tan llunyà de la conven-

21. Aquesta transformació del nom "convergence" de Maxwell, òbvia en canviar el signe del producte escalar, ja havia estat duta a terme per CLIFORD-1878, 209.

cionalitat d'un llibre de text i tan ple de tocs d'un humor que arriba a frec de la ironia.

Després d'haver introduït les nocions d'escalar i de vector, relaciona la seva àlgebra vectorial amb la de les coordenades cartesianes i conclou així aquest apartat [HEAVISIDE-1893a, 134]:

"L'àlgebra vectorial és el llenguatge natural dels vectors, i ningú que hagi arribat a aprendre-la (mentre no sigui massa tard de la seva vida) no pensarà mai recular de la vitalitat dels vectors a la complexitat morta del sistema cartesià".

L'apartat següent es titula "Caràcter abstrús dels quaternions, i comparativa simplicitat que resulta d'ignorar-los" i hi comença la polèmica quaterniònica [ibídem]:

"És clar que si suposem, tal com se sol suposar generalment, que l'àlgebra vectorial és una cosa "terriblement difícil" ["awfully difficult"], que comprèn consideracions metafísiques de caràcter abstrús, les quals només poden ésser enteses completament per alguns metafísico-matemàtics consumadament profunds, com ara el Prof, Tait, per exemple. Bé, si fos així, no hi hauria ni la més petita possibilitat perquè l'àlgebra i l'anàlisi vectorials arribessin a ésser algun dia universalment utilitzables, i jo no estaria escrivint això ni hagués persistit durant anys i anys en l'ús d'àlgebra vectorial per a la teoria electromagnètica –com un profeta cridant en el desert–. Concloguem-ne, doncs, simplement, que jo crec que l'anàlisi vectorial és en camí d'esdevenir quelcom d'universalment emprat en el treball científic i que allò que aquesta requereix no és "terriblement difícil"".

Aquí repeteix la seva frase que diu que ell pretén un "tractat de Quaternions sense quaternions", i en el paràgraf següent presenta aquest "alliberament del quaternió" com l'alliberament d'una cosa idolàtrica i tirànica [ibídem, 136-137]:

"'Quaternió' fou definit, tinc entès, per una col·legiala com "una antiga cerimònia religiosa". Però això és totalment errat. Els antics –a diferència del Prof. Tait– no coneixien ni adoraven els quaternions. El quaternió i les seves lleis foren descoberts per aquell geni extraordinari de Sir W. Hamilton...

"Ara bé, en un tractat de Quaternions el quaternió és l'amo i imposa lleis al vector i a l'escalar. Tot gira al voltant del quaternió... amb l'ajut de la quantitat imaginària $\sqrt{-1}$... Això va així en el capítol segon del tractat de Tait. Jo no l'he entès mai, me'l vaig haver de saltar".

La disputa personal encara s'aguditza més a l'apartat següent, expressivament titulat "Tait contra Gibbs i Gibbs contra Tait". Comença així [ibídem, 137]:

"Considerats els deutes que he contret personalment amb el Prof. Tait (malgrat aquest lamentable capítol segon), pot semblar ingrat que ara vingui amb exigències. Però és que tinc clavada al cor la difusió d'un coneixement útil d'anàlisi vectorial i elemental, de la mateixa manera que el prof. Tait hi té l'extensió de la teoria de quaternions. Però a més el Prof. Tait ha adoptat una actitud molt conservadora respecte al gran sistema de Hamilton".

D'exemple d'aquest conservadorisme Heaviside cita les frases, que hem recollit al paràgraf precedent, on Tait titlla de "monstre hermafrodita" el fullet de Gibbs. Al·ludeix a la "convincent defensa" de Gibbs que, a parer seu, "ha estat, de molt, qui ha argumentat millor, per bé que la contrarèplica del Prof. Tait encara no és publicada", i conclou, defensant Gibbs [ibídem, 138]: "... puc (i me n'alegro) expressar un acord general d'opinió amb ell sobre el quaternió i la relativa inutilitat d'aquest en l'anàlisi vectorial pràctica". Per contra, no està d'acord amb la seva notació (Heaviside continua encaparrat a denotar el producte escalar sense cap signe i el vectorial amb la V hamiltoniana).

Els dos darrers apartats d'aquesta introducció són dedicats a justificar "L'abolició del signe menys dels quaternions" i la convenció, avui encara vigent, d'imprimir els vectors en negreta. A parer seu hom no ha pas d'emprar, tal com ho fan Hamilton i Tait, l'alfabet grec, car "no hi ha gaires estudiants de grec i de fet molta gent pensa que ja és hora que les llengües mortes siguin enterrades" [ibídem, 140]. I hom encara ha d'emprar menys, tal com ho féu Maxwell, l'alfabet gòtic [ibídem]:

"Maxwell emprava lletres alemanyes o gòtiques. Això fou una elecció desafortunada, ella sola suficient per a prevenir els lectors contra l'anàlisi vectorial... Algunes lletres d'aquestes són tan semblants que cal examinar-les detingudament amb lupa per tal de distingir-les... Però a part d'això, les seves fioritures de tipus ornamental van contra la legibilitat... Són una relíquia del monacat medieval, totalment inadaptada als nostres dies".

Emprar el mateix alfabet llatí crea confusió entre vectors i escalars i per això, ens diu, "finalment vaig trobar la salvació en el tipus de lletra negreta ["Claredons"] i vaig introduir-ne l'ús per als vectors" [ibídem, 141]. I cita el seu article del 1886 on aquesta convenció és emprada per primera vegada.

Cap al final del capítol, abans de tornar-lo a resumir, insisteix perquè hom torni a llegir, amb més coneixement de causa sobre els vectors, aquestes pàgines introductòries. I el darrer apartat es torna a acarnissar en la polèmica. El títol n'és "Inconveniència dels quaternions per a les necessitats del físic. Axioma: El que ha estat un Vector, sempre serà un Vector" ["Once a Vector, always a Vector"]. Hi presenta així la situació [ibídem, 301-302]:

"... És sabut que ... el Prof. Tait diu als físics que els quaternions són justament allò que ells necessiten per a llur objectiu físic. També és sabut que els físics, amb gran obstinació, han estat meticulosos ... a l'hora de no voler saber res dels quaternions... Hom intenta apedaçar-los, per fer-los una mica més intel·ligibles, amb un gran disgust del Prof. Tait, que voldria preservar el corrent quaterniònic pur i incontaminat. Ara bé, qui té raó, el Prof. Tait o els contaminadors? Hi ha opinions diverses. La meva és que la resposta depèn totalment del punt de vista.

"Si prescindim de les aplicacions pràctiques a la Física, i ens mirem els Quaternions únicament des del punt de vista quaterniònic, llavors el Prof. Tait té raó, absolutament tota la raó, car el tractat de Quaternions ofereix una manera única, simple i natural de tractar *quaternions*. Observeu el subratllat.

"... Però quan el Prof. Tait es vana de quant perfectament adaptats i naturals són els quaternions per a ús dels físics en llurs recerques, crec que va totalment equivocat...".

Conclou, finalment, amb un paràgraf tan modest com agressiu, que la història ha confirmat en totes les seves frases [ibídem, 305]:

"Confio que el capítol que estic concloent pugui servir de tapaforats fins que hom hagi arribat a escriure tractats vectorials normals, aptes per als físics i basats en un tractament vectorial dels vectors. Els quaternionistes volen arraconar els "entrebancs cartesians", que diuen ells. Això es pot fer amb els quaternions, però fer-ho amb els vectors seria una equivocació greu. El meu sistema no és ni de bon tros hostil al sistema cartesià, n'és la mateixa essència".

Hom pot comprendre que aquestes agressions polèmiques de Heaviside rebessin una resposta. De fet ja n'havia rebut un article anterior [HEAVISIDE-1892], enviat directament a Tait. Aquest, en una carta a *Nature* [TAIT-1893a], al·ludint als esforços de Gibbs i Heaviside, reafirma "la necessària impotència i àdhuc la inevitable feixuguesa de qualsevol sistema de la (pretesa) *Anàlisi Vectorial* que no reconegui com a característica més important el producte (o el quocient) de dos vectors, és a dir, el quaternió". I explica així la seva impressió de l'article de Heaviside:

"Vaig trobar que no solament havia de desaprendre els Quaternions (contra els quals hi són afirmades moltes coses), sinó que a més havia d'aprendre una nova i desmanyotadíssima paròdia de notacions que m'erem ben familiars... Arribat en aquest punt, em vaig limitar a deixar-lo".

Heaviside respon amb una altra carta a *Nature*, "Vectors contra Quaternions" [HEAVISIDE-1893b], en la qual descriu així al·legòricament l'estat d'alarma provocat per ell mateix:

"La calma i la pau quaterniòniques han estat pertorbades. A la ciutadella quaterniònica, hi regna la confusió: alarmes i corregudes, i tirades de pedres i vessament d'aigua bullent damunt les hosts invasores. ¿Quina altra cosa, si no, significa aquesta carta?".

No acabà pas aquí la disputa pública [cf. TAIT-1893b, HEAVISIDE-1893c]. Però el fet és que la història donà el triomf a les hosts invasores. El 1910 ja havien aparegut deu llibres vectorialistes, que reforçaren les notes de Gibbs i el tapaforats de Heaviside [cf. FÖPPL-1894, WILSON-1901, BUCHERER-1903, GANS-1905, JAHNKE-1905, VALENTINER-1907, SOMOFF-1907, BURALIFORTI-MARCOLONGO-1909, COFFIN-1909, IGNATOWSKY-1909].

4. Reflexions finals

Dirigim una mirada de conjunt a la nostra història. Els vectors són albirats com peces bàsiques físiques o geomètriques, prèviament a tota representació vectorial dels nombres complexos. Però només seran concebuts com a quantitats capaces de suma i de producte mitjançant el càlcul de quaternions, complexificació (dimensional i metafísica) de l'àlgebra complexa. Simplificar aquest càlcul i transformar-lo en anàlisi vectorial fou una batalla difícil, guanyada gràcies a l'exigència pràctica de les aplicacions físiques. Aquest procés pot inspirar reflexions generals sobre la història de les ciències.

Les ciències avancen seguint camins tortuosos. La història de les ciències és profundament didàctica, però no pas immediatament didàctica. La nostra història ens pot ajudar a entendre millor i a ensenyar més humanament l'anàlisi vectorial. Però fóra absurd que per a aprendre aquests conceptes obliguéssim els nostres alumnes a recórrer el llarg itinerari que seguí la humanitat en conquerir-los.

El progrés científic és dut a terme amb canvis, revolucions, de certs marcs conceptuals. Parlar d'un producte no commutatiu o, gairebé quaranta anys més tard, d'un producte el resultat del qual no és homogeni amb els factors, implica el canvi de pressuposicions bàsiques que semblaven indiscutibles. Per molt que siguin micro-revolucions, són canvis bruscs de "punt de vista", "traduccions" que provoquen una tensió psicològica i social.

Els canvis científics, àdhuc els més assenyadament acceptats, sempre costen algun sacrifici. Pocs físics avui saben què és un quaternió, mentre que tots manegen hàbilment els vectors. Confiem que això hagi col·laborat al progrés de la física. Però estem convençuts (amb Tait i àdhuc amb Gibbs i Heaviside) que el quaternió té una estructura formal més perfecta. Avui és anomenada estructura de "cos".

Entre els criteris per a acceptar assenyadament un canvi científic hi ha la senzillesa i la promesa de futur. Aquests són els que sembla que feren triomfar els vectors. Simplicitat intuïtiva que avui veiem com l'"essència mateixa" de l'espai mètric. I promesa satisfeta no solament en la teoria de camps sinó també en l'espai de Minkowski de la física relativista, i àdhuc en els espais de Hilbert de la física quàntica.

REFERÈNCIES

Apolin, Adalvert. 1970: "Die geschichtliche Entwicklung der Vectorrechnung". *Philosophia Nat.* **12**, 357-363 (1970).

Appleyard, Rollo. 1930: "Oliver Heaviside". *Pioneers of Electrical Communications,* 211-260. Londres 1930.

Argand, Jean Robert. 1806: *Essai sur une manière de représenter les quantités imaginaires dans les constructions géométriques.* París[1] 1806, [2]1874*. (Reproduïda en Facsímil per Blanchard, París 1971).

– 1813: "Essai sur une manière de représentar les quntités imaginaires dans les constructions géométriques" *Annales de Mathematiques de Gergonne* **4**, 133-147 (1813-1814). (Reproduït a ARGAND-1806, *76-96).

– 1814: "Réflexions sur la nouvelle théorie des imaginaires, suivies d'una application à la demostration d'un théorème d'Analyse". *Annales de Mathematiques de Gergonne* **5**, 197-209 (1814-1815). (Reproduït a ARGAND-1806, *112-123).

Aristòtil, *Pseudo-Mecanica.* O. Apelt (ed.). Leipzig 1888. (Recollit a: Bekker (ed.), *Aristotelis Opera 2*).

Arquimedes. Oeuvres: *Les Oeuvres complètes d'Archimède suivies des commentaries d'Eutocius d'Ascalon,* 2 vols. Paul ver Eecke (trad. i com.). Blanchard, París 1960.

Bachelard, S. 1974: "Du rôle de l'interpretation dans les théories algébriques de Hamilton". *XIII^e Congrés International d'Historie des Sciences,* Moscou, 1971. *Actes:* Nauka, Moscou 1974, sec *5*, 113-118.

Beebe-Phillips, W. (B.), A.V. (P.). 1889: "The Orbit of Swift's Comet, 1880V, Determined by Gibb's Vector Method". *Gould's Astronomical Journal* **9**, 114-117 i 121-124 (1889).

Benedetti, Giovanni Battista. 1585: *Diversarum speculationum mathematicatum et physicatum liber.* Torí 1585.

Bernoulli, Daniel. 1726: "Examen principiorum mechanicae et demostrationes geometricae de compositione et resolutione virium". *Comentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae* **1**, (1726).

Bochner, Salomon. 1966: *The role of mathematics in the rise of science.* Princeton 1966.

Bork, Alfred M. 1964: "The Fourth Dimension in Nineteenth-Century Physics". *Isis* **55**, 326-338 (1964).

– 1966: "Vectors Versus Quaternions - The Letters in *Nature*". *Am. Jour. Phys.* **34**, 202-211.

– 1967: "Maxwell and the Vector Potencial". *Isis* **58**, 210-222.

Bucherer, Alfred Heinrich. 1903: *Elemente der Vector-Analysis mit Beispielen aus der theoretischen Physik.* Leipzig 1903.

Buée, Abbé: 1806. "Mémorie sur les quantités imaginaires". *Transactions of the Royal Society of London* **96**, 23-88 (1806). (Llegida el 20 juny 1805).

Burali. Forti-Marcolongo, Cesare (B.F.), Roberto (M.). 1909: *Elementi di calcolo vettoriale con numerose applicazioni alla geometria, alla meccanica et alla Fisica-Matematica.* Bolonya 1909.

Cajori, Florian. 1912: "Historial note on the grafic representation of imafinaries before the time of Wessel". *Amer. Math. Mon.* **19**, 167-171 (1912).

Glacett, Marshall. 1959: *The Science of Mechanics in the Middle Ages.* Wisconsin, Madison 1959.

Clifford, William Kingdon. 1878: *Elements of Dynamics. I. Kinematic.* Londres 1878.

Coffin, Joseph George. 1909: *Vector Analysis: An Introduction to Vector Methods and their Various Applications to Physics and Mathematics.* Nova York 1909.

Cohen-Drabkin, Morris R. (C.), I.E. (D). 1948: *A Source Book in Greek Science.* Harvard, Cambridge (Mass.) 1948,[4] 1969*.

Coolidge, Julian Lowell. 1924: *The Geometry of the Complex Domain.* Oxford 1924.

Crowe, Michael J. 1967a: *A History of Vector Analysis.* Notre Dame, Londres 1967.
– 1967b: "The history of the idea of a vectorial system to 1910". *Diss. Abs.* **28**, 566-A (1967).

Dirac, P.A.M. 1944: "Application of Quaternions to Lorentz Transformations". *Proceedings of the Royal Irish Academy* **50**, 261-270 (1944-1945).

Dobrovol'skii, V.A. 1968: "Développement de la théorie des vecteurs et des quaternions dans les travaux des mathématicies russes du XIX[e] siècle". *Revue Hist. Sci. Applic.* **21**, 345-349 (1968).

Duhem, P. 1905: *Les origines de la statique,* 2 vols. París 1905-1906.

Fischer, Otto F. 1951: *Universal Mechanics and Hamilton's Quaternions, A Cavalcade.* Stochkholm 1951.
– 1957: *Five Mathematical Structural Models in Natural Philosophy with Technical Physical Quaternions.* Estocolm 1957.

Föppl, August. 1894: *Einführung in die Maxwell'sche Theorie der Elektricität.* Leipzig 1894.

Français, Jacques-Fréderic. 1813a: "Nouveaux principes de Géometrie de position, et interpretation géométrique des symboles imaginaires". *Annales de Mathématiques de Gergonne* 4, 61-71 (1813-1814). (Reproduït a ARGAND-1806, *63-74).
– 1813b: "Sur la théorie des quantités imaginaires". *Annales de Mathématiques de Gergonne* 4, 222-227 (1813-1814). (Reproduït a ARGAND-1806, *96-101).
– 1814: *Annales de Mathématiques de Gergonne* 4, 364-367. (Reproduït a ARGAND-1806, *109-111).

Freudenthal, Hans. 1954: "Leibniz und die analysis situs". *Homenaje a Millás-Vallicrosa 1,* 612-621. Barcelona 1954.

Gans, Richard. 1905: *Einfuhrung in die Vektor-Analysis mit Anwendungen auf die mathematische Physik.* Leipzig 1905.

Gauss, Carl Friedrich. 1813: "Theoria attractionis corporum sphaeridicorum ellipticorum homogeneorum methodo novo tractata". *Commentationes societatis regiae scientiarum Gottingensis recentiores* **2**, 2-5 (1813). (Reproduït a GAUSS-WERKE, 5, 5-7).

– 1831: Sense títol: discussió de la seva "theroria residuorum biquadraticum, Comentatio secunda". *Gottingische gelehrte Anzaigen* de 23 abril 1831. (Reproduïda a GAUSS-Werke *2*, 169-178).

– 1840: "Allgemeine Lehrsätze in Beziehung auf die im verkehrten Verhältnisse des quadrates der Entfernung wirkenden Anziehungs und Abstossungskräfte". *Resultate aus den Beobachtungen des magnetischen Vereins im Jahre 1839.* Leipzig 1840, 1-51.

– *Werke:* Ed. Königliche Gasellschaft der Wissenschaft zu Göttingen, 1863. (Reproduït en facsímil per G. Olms Verlag, Hildesheim, Nova York 1973).

Gibbs, Josiah Willard. 1881: *Elements of Vector Analysis.* "Printed, not published" 1881, [2]1884. (Reproduït a GIBBS-Papers, *2, 17-90).

– 1886: "On Multiple Algebra" *Proceedings of the American Association for the Advancement of Science* **35**, 37-66 (1886). (Reproduït a GIBBS-Papers ***2**, 91-117).

– 1889: "On the Determination of Elliptic Orbit from Three Complete Observations". *Memoirs of the National Academy of Sciences* **4.2**, 79-104 (1889). (Reproduït a GIBBS-Papers **2*, 118-148).

– 1891a: "On the Role of Quaternions in the Algebra of Vectors". *Nature* **43**, 511 (1981).

– 1891 b: "Quaternions and the 'Ausdehnungslehre'". *Nature 44,* 79 (1981).
Papers: *The Scientific Papers of J. Willard of J. Willard Gibbs,* 2 vols. Nova York, 1961.

Grassmann, Hermann Gunther. 1844: *Die lineale Ausdehnungslehre, ein neur Zweig der Mathematik dargestellt und durch Anwendungen auf die übrigen Zweige der Mathematik, wie auch auf die Statik, Mechanik, die Lehre vom Magnetismus und die Krystallonomie erlautert.* Berlín[1] 1844, [2]1862.

Graves, Rev. Robert Perceval. 1882: *Life of Sir William Rowan Hamilton,* 3 vols i un *Addendum.* Dublín 1882-1891.

Green, George. 1828: *Essay on the Application of Mathematical Analysis to the Theory of Electricity and Magnatism.* Nottingham 1828.

Hall-Hall, A. Rupert i Marie Boas. 1962: *Unpublished scientific papers of Isaac Newton.* Cambridge University Press, 1962.

Hamilton, Sir Willian Rowan. 1837: *Theory of Conjugate Functions, or Algebraic Couples: with a Preliminary and Elementary Essay on Algebra as the science of pure Time.* Transactions of the Royal Irish Academy **17**, 293-422 (1837).

– 1843: Carta a John T. Graves de 17 oct. 1843. (Reproduïda a HAMILTON-1844b, 490-495).

– 1844a: "On a New Species of Imaginary Quantities connected with the Theory of Quaternions". *Proceedings of the Royal Irish Academy* **2**, 424-434 (1844).

– 1844b: "On Quaternions, or on a New System of Imaginaries in Algebra". *Philosophycal Magazine,* 3rd Ser., **25**, 10-13, 241-246, 489-495 (1844).

– 1845: "On Quaternions, or on a New System of Imaginaries in Algebra". Ibídem **26**, 220-224 (1845).
– 1846: "On Quaternions, or on a New System of Imaginaries in Algebra". Ibídem **29**, 26-31, 113-122, 326-328 (1846).
– 1847a: "On Quaternions". *Proceedings of the Royal Irish Academy* **3**, 1-16, 273-292 (1847).
– 1847b: "On Quaternions, or on a New System of Imaginaries in Algebra". *Phil. Mag.* **30**, 458-461; **31**, 214-219, 278-293, 511-519 (1847).
– 1848a: "Researches respecting Quaternions". *Transactions of the Royal Irish Academy* **21**, 199-296 (1848).
– 1848b: "On Quaternions, or on a New System of Imaginaries in Algebra". *Phil. Mag.* **32**, 367-374; **33**, 58-60 (1948).
– 1849: "On Quaternions, or on a New System of Imaginaries in Algebra". Ibídem **34**, 294-297, 340-343, 425-439; **35**, 13-137, 200-204 (1849).
– 1850: "On Quaternions, or on a New System of Imaginaries in Algebra". Ibídem **36**, 305-306 (1850).
– 1853: *Lectures on Quaternions.* Dublín 1853.
– 1866: *Elements of Quaternions.* Londres[1] 1866, [2]1899-1901. (Reproducció de la 2.ª ed.: Chelsea Publishing Company, Nova York 1969).
Papers: *The mathematical papers*, vol. 3, algebra. Ed. by H. Halberstam and R.E. Ingram for the Royal Irish Academy. Univ Press, Cambridge 1967.

Hankins, T.L. 1977: "Triplets and Triads: Sir William Rowan Hamilton on the Metaphysics of Mathematics". *Isis* **68**, 175-193 (1977).

Heaviside, Oliver. 1882: "The Relations between Magnetic Force and Electric Current". *Electrician* (1882). (Reproduït a HEAVISIDE-Papers *1*, 195-231).
– 1883a: "Current Energy". *Electrician* **10** (1883). (Reproduït amb modificacions de l'autor a HEAVISIDE-Papers *1*, 231-255).
– 1883b: "Some Electrostatic and Magnetic Relations". *Electrician* (1883). Reproduït a HEAVISIDE-Papers *1*, 256.
– 1885a: "Electromagnetic Induction and its Propagation". *Electrician* (1885). (Reproduït a HEAVISIDE-Papers *1*,429-560, i *2*, 39-155).
– 1885b: "On the Electromagnetic Wave Surface". *Philosophical Magazine.* (Reproduït a HEAVISIDE-Papers *2*, 1-23).
– 1892: "On the Forces, Stresses, and Fluxes of Energy in the Electromagnetic Field". *Philosophical Transactions of the Royal Society of London* **183 A**, 423-484 (1892). (Publicat poc abans a HEAVISIDE-Papers *2*, *521-574).
– 1893a: *Electromagnetic Theory.* "The Electrician", Londres: vol. 1, 1893; vol 2, 1899; vol 3, 1912.
– 1893b: "Vectors versus Quaternions". *Nature* **47**, 533 (1893).
– 1893c: "Quaternionic Innovation". *Nature* **49**, 246 (1893).
Papers: *Electrical Papers.* 2 vols. Londres 1892.

Herivel, John. 1965: *The Background to Newton's Principia.* Claredon Press, Oxford 1965.

Héron d'Alexandria. Mechanica: "Les mécaniques ou l'élevateur de Héron d'Alexandrie". *Journal Asiatique* **1**, 386-472 (1893). (Recollit a: L. Nix (ed.), *Heronis Alexandrini opera quae supersunt omnia, 2,* Leipzig 1900).

Hertzberger, Max. 1966: "Ideen von Grassman und Hamilton". *Sber. Bayer. Akad. Wiss. Math. Naturwiss Kl.* 1966, 27-39.

Ignatowsky, W.V. 1909: *Die Vektor analysis und ihre Anwendung in der theoretischen Physik.* Leipzig i Berlín, Teil I 1909, Teil II 1910.

Irish-Acad. 1843: Minutes of Council of the Royal Irish Academy, Sessió del 16 d'octubre de 1843. (Reproduïda a *Proceedings of the Royal Irish Academy* **50**, 89-92, 1944-1945).

Itard, Jean. 1969: *Matériaux pour l'histoire des nombres complexes* (Bibliothèque d'information sur l'enseignement mathématique, *2*). Association des professeurs de mathematiques de l'enseignement public, París 1969.

Jahnke, Eugen. 1905: *Vorlesungen über die Vektorenrechnung mit Anwendungen auf Geometrie, Mechanik und mathematische Physik.* Leipzig 1905.

Jammer, Max. 1957: *Concepts of force, A study in the foundations of dynamics.* Harvard Univ. Press, Cambridge (Mass) 1957.

Joiner, James W. 1972: "A history of vector analysis". *Diss. Abs. Int.* **33**, 4071-B (1972).

Jones, P.S. 1954: "Complex Numbers: An Example of Recurring Themes in the Development of Mathematics". *Mathematics Teacher* **47**, 106-114, 257-263, 340-345 (1954).

Kelland-Tait, Philip (K.), Peter Guthrie (T.). 1873: *Introduction to Quaternions.* Londres 1873, ²1882.

Kiefer, Lucien. 1967: "Le plan complexe et les coordonnes isotropes". *Janus* **54**, 207-211 (1967).

Knott, Cargill Gilston. 1911: *Life and Scientific Work of Peter Guthrie Tait,* Cambridge, 1911.

Kuhn, Thomas S. 1962: *The Structure of Scientific Revolutions.* Chicago¹ 1962, ²1970. (Trad: *La estructura de las revoluciones científicas,* Mèxic 1971).

Lagrange, Joseph Louis. 1760: *Nouvelles recherches sur la nature et la propagation du son, 2.* París 1760-61. (Reproduït a Oeuvres *1,* 263).

Lakatos, Imre. 1970: "La falsación y la metodologia de los programas de investigación científica", a I. Lakatos i A. Musgrave (eds.): *La Crítica y el Desarrollo del Conocimiento.* Grijalbo, Barcelona 1975. Traducción de *Criticism and the Growth of knowledge.* Cambridge 1970.

Leigniz, Gottfried Wilhelm. 1679: Carta a Christian Huygens 8 set. 1679, publicada per primera vegada a *Christi Huygenii aliorumque seculi XVIII virorum celebrium exercitationes mathematicae et philosophiae.* FASC. II, p. 6, ed. Uylenbroek, Hagae comitum 1833, i després a *Mathematische Schriften 2,* 17-27, ed. C.I. Gerhardt, Berlín 1850 i a *Philosophical Papers and Letters, 1,* 381-396, ed. i trad. Leroy E. Loemker, Chicago 1956.

Lewis, Albert C. 1977: "H. Grassmann's 1844 *Ausdehnungslehre* and Schleiermacher's Dialektik", *Ann. Sci.* **34,** 103-162 (1977).

MacDuffee, C.C. 1945: "Algebra's Debt to Hamilton", David Eugen Smith (ed.), *A Collection of Papers in Memory of Sir William Rowan Hamilton,* Nova York 1945.

MacFarlane, Alexander. 1904: *Bibliography of Quaternions and Allied Systems of Mathematics,* Dublín 1904, Suplements a *Quaternions* 1905, 8-10, 12-13.

Maurin-Michalski, K. i K. 1977: "Nathematik als Sprache der Physik", *Philos. Natur.* **16,** 363-382 (1977).

Maxwell, James Clerk. 1856: "On Faraday's Lines of Force", *Cambridge Philosophical Transactions 10,* 27-83 (1856) (Reproduït a MAXWELL-Papers *1,* 155-229).
– 1861: "On Physical Lines of Force", *Philosophical Magazine and Journal of Science* **21,** 161-175; 281-291 (1861); **23,** 12-14 (1862). (Reproduït a MAXWELL-Papers **1,* 451-513).
– 1864: "A Dynamical Theory of the Electromagnetic Field", *Phil. Trnas.* **155,** 456-512 (1865, llegida el 1864). (Reproduït a MAXWELL-Papers **1,* 526-597).
– 1870: "Address to the Mathematical and Physical Sections of the British Association", *British Association for the Advancement of Science Repport* **40** (1870). (Reproduït a MAXWELL-Papers **2,* 215-229).
– 1871: "On the Mathematical Classification of Physical Quantities", *Proceedings of the London Mathematical Society* **3,** 224-232 (1871). (Reproduït a MAXWELL-Papers **2,* 257-266).
– 1873a: *Treatise on Electricity and Magnetism,* 2 vols, Claredon, Oxford [1]1873, [2]1881, [3]1891*. (Reproduït a Dover, Nova York [1]1954).
– 1873b: "Quaternions". *Nature* **9,** 137-138 (1973). (Anònim, i no reproduït a MAXWELL-Papers).
Papers: W.D. Niven (ed.). *The Scientific Papers of James Clerk Maxwell,* Cambridge 1890, Dover, Nova York 1965*.

Moon, P. *et al.* 1965: *Vectors.* Van Nostrand, 1965.

Mourey, C.V. 1828: *La vraie théorie des quantités négatives et des quantités prétendues imaginaires,* París 1828.

Naiman, Arnold R. 1974: "The role of quaternions in the history of mathematics". *Diss. Abs. Inst.* **35,** 2315-B (1974).

Newton, Isaac. 1687: *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica,* Londres [1]1687, [2]1713, [3]1726. Edició crítica amb les variants de les tres edicions i les anotacions de Newton. A. Koyré i I.B. Cohen (eds.), *Isaac Newton's Philosophiae Naturalis Principia Mathematica,* 2 vols, Cambridge Univ. Press, 1972.
Correspondence: H.W. Turnbull, J.F. Scott, A.R. Hall i L. Tilling (eds.). *The correspondence of Isaac Newton,* Cambridge Univ. Press 1959-77.
Papers: DT. Whiteside (ed.). The Mathematical Papers of Isaac Newton, vols. *1-7,* Cambridge Univ. Press, 1967-1976.

Ostrogradsky. 1831: *Mem. de l'Acad. de St. Petersburg* **1,** 39 (1831).

Pawlikowski, George J. 1967: "The men responsible for the development of vectors". *Maths. Teacher* **60,** 393-396 (1967).

Peacock, George. 1834: "Report of the Recent Progress and Present State of Certain Branches of Analysis". *Report of the British Association for the Advancement of Science* 1834, 185-352.

Pogrebysskii, Iosif B. 1968: "Structures mathématiques et théories physiques depuis Archimède jusqu'à Lagrange". *Revue Synth.* **89,** 247-256 (1968).

Pycior, H.M. 1976: "The Role of Sir William Rowan Hamilton in the Development of British Modern Algebra". *Diss. Abstr. Intern. A*, **37**, 1184 (1976).

Rastall, Peter. 1964: "Quaternions in Relativity", *Rev. Mod. Phys.* **36**, 820-832.

Servois, François-Joseph. 1813: "Sur la théorie des quantités imaginaires". *Annales de Mathematiques de Gergonne* **4**, 228-235 (1813-1814). (Reproduït a ARGAND-1806, *101-109).

Somoff, Pavel Osipovich. 1907: *Anàlisi vectorial i les seves aplicacions* (en rus). Sant Petersburg, 1907.

Stevin, Simon. 1586: *De Beghinselen de Weeghconst.* Leiden 1586.

Stokes, George Gabriel. 1854: *Smith's Prize Exam.* 1854. (Reproduït a STOKES-Papers *5*, 320-321).
Papers: *Mathematical and Physical Papers.* Cambridge 1905.

Stolze, Charles H. 1978: "A history of the divergence theorem". *Hist. Math.* **5**, 437-442 (1978) (Canadà).

Stuloff, Nikolai N. 1966: "Die mathematischen Methoden in 19. Jahrhundert u. ihre Wechselbeiziehungen zu einigen Fragen der Physik". *Technikgeschichte* **33**, 52-71 (1966).

Tait, Peter Guthrie. 1862: *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh*, 28 abril 1862.
– 1867a: *Elementary Treatise on Quaternions.* Oxford 1867, [2]1873*, [3]1890.
– 1867b: *Carta a Maxwell* del 13 Des. 1867, arxiu de la Cambridge University Library, citada a CROWE-67a, 132.
– 1870a: "On Green's and Other Allied Theorems". *Transactions of the Royal Society of Edinburgh* **26**, 169-184 (1870). (Reproduït a TAIT-Papers *1*, 136-150).
– 1870b: "On some Quaternion Integrals". *Proceedings of the Royal Society of Edimburg* **7**, 318-320 (1870) i 784-788 (1972). (Reproduït a TAIT-Papers *1*, 159-163).
– 1890: Article "Quaternions". *Encyclopedia Britanica,* [9]1890. (Reproduït i completat en edicions posteriors).
– 1891: "The Role of Quaternions in the Algebra of Vectors". *Nature* **43**, 808 (1891).
– 1893a: "Vector Analysis". *Nature* **47**, 225 (1893).
– 1893b: "Review of *Quaternions as an Instrument in Physical Research,* by A. Mc Aulay". *Nature* **49**, 193-194 (1893).
Papers: *Scientific Papers,* Cambridge, 1898.

Thomson-Tait, Sir William (Th.), Peter Guthrie (Ta.). 1867: *Treatise on Natural Philosophy.* Oxford 1867; Cambridge[2] 1879*.

Toulmin, Stephen. 1972: *Human Understanding, I: General Introduction and Collective Use and Evolution of Concepts.* Princeton, 1972. (Trad.: *La comprensión humana, 1: El uso colectivo y la evolución de los conceptos,* Alianza, Madrid 1977).

Truesdell, C. 1953: "The physical components of vectors and tensors". *Z. Angew. Math. Mech.* **33**, 345-356 (1953).

Valentiner, Siegfried. 1907: *Vektoranalysis.* Leipzig, 1907.

Varignon, Pierre. 1687: *Project de nouvelle mécanique.* París 1687.

Waerden, Bartel Leendert van der. 1973: *Hamiltons Entdeckung der Quaternionen.* Vandenboek u. Ruprecht, Göttingen 1973.

Warren, John. 1828: *A Treatise on the Geometrical Representation of the Square Roots of Negative Quantities,* Cambridge 1828.

Wessel, Caspar. 1799: "Om Directionens analytiske Betegning", (trad.: "Sobre la representació analítica de la direcció). *Nye Samling af det Kongelige Danske Videnskabernes Selskabs Skrifter* (trad.: *Memòries de la Reial Acadèmia de Dinamarca)* 5 (1799, llegit el 1797). En francès: *Essai sur la representation analytique de la direction.* H. Valentiner i T.N. Thiele (eds.), Copenhage 1897.

Wheeler, Lynde Phelps. 1962: *Josiah Willard Gibbs.* New Haven 1962.

Whittaker, Edmund Taylor. 1944: "The Sequence of Ideas in the Discovery of Quaternions". *Proceedings of the Royal Irish Academy* **50**, 93-98 (1944-1945).

Wilson, Edwin Bidwell. 1901: *Vector Analysis, A Text-Book for the Use of Students of Mathematics and Physics.* Yale University Press, 1901.

– 1931: "Reminiscences of Gibbs by a Student and Colleague". *Scientific Monthly* **32**, 219-220 (1931).

Windred, G. 1929: "History o f the theory of Imaginary and Complex Quantities". *Mathematical Gazette* **14**, 533-541 (1929).

Yezzi, Ronald D. 1969: "The application of mathematics to concepts in Physics: Four theories". *Diss. Abs. Int.* **29**, 4061-A (1969).